第一章 向量代数

向量代数是几何代数化的最初步骤, 也是连接几何和代数的最为本质的环节. 向量的各种代数运算 (特别是分配率) 蕴含着最基本的一些几何定理. 于是, 许多深刻的几何定理可以通过一些简单的向量运算而得到.

§1 向量的线性运算

1.1 向量的加法

设 $\mathbb{E}^3$ 为空间中所有点构成的集合. 我们称空间中的有向线段为 **向量**(或 **矢量**).

如果 A 和 B 是空间中的两个点，我们记 $\overrightarrow{AB}$ 为以 A 为起点，以 B 为终点的有向线段构成的向量. 我们将线段 $\overline{AB}$ 的长度定义为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记为 $|\overrightarrow{AB}|$(或 $d(A,B)$). 特别地，当 $A=B$ 时，我们称向量 $\overrightarrow{AB}$ 为零向量，它的长度为 0.

设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是空间中的两个向量. 如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 可以通过平移与向量 $\overrightarrow{CD}$ 重合，我们就将它们视为相等的向量，记为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 换言之，如果两个向量有相同的长度和方向，则相等.

由空间几何的基本性质，我们知道，如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的，而向量 $\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{EF}$ 是相等的，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{EF}$ 也必定相等 (参见图 1-1). 我们将用同一个黑体字母 $\mathbf{a}$ 来表示所有这些相等的向量.

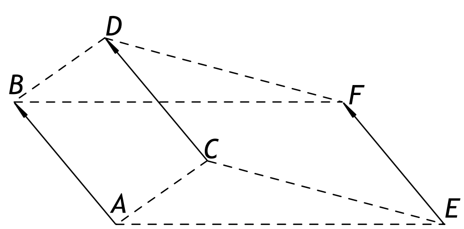

图 1-1

定义 1.1 我们称空间中的所有向量构成的集合 $\mathbb{V}$ 为 **向量空间**.

在本书中, 我们将用黑体字母 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\cdots\}$ 来表示向量. 特别地, 我们用 $\mathbf{0}$ 来表示零向量.

设 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ 为一个向量．由定义知：任给空间中的一点 A, 存在空间中的唯一点 B, 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. 我们定义向量 $\mathbf{a}$ 的长度为 $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$. 由于相等的向量有相同的长度，这个定义是合理的.

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, 我们定义 $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$. 向量 $-\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{a}$ 长度相同，方向相反.

定义 1.2 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ 为空间中的两个向量．在空间中任取一点 O, 则存在唯一点 A 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. 同时，存在唯一点 B 使得 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$. 我们定义向量 $\overrightarrow{OB}$ 为两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之和，记为 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

容易验证，如果取不同的 O 点，则得到的向量与原向量只差一个平移，为相等的向量．于是，向量的加法与 O 点的选取无关 (参见图 1-2). 这说明了以上加法的定义是合理的.

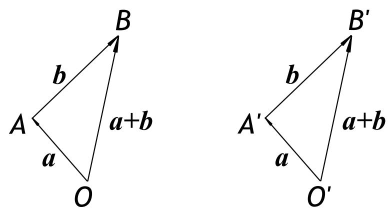

图 1-2

向量加法的上述定义称为向量加法的＂三角形法则＂．由定义可知，对空间中的任意三点 A, B, C, 恒有等式

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

由图 1-3 容易看出，以下向量加法的＂平行四边形法则＂同样适用：取 O, A, B 三点使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, 以线段 $\overline{OA}$ 和 $\overline{OB}$ 为边作平行四边形 $AOBC$, 则有 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$.

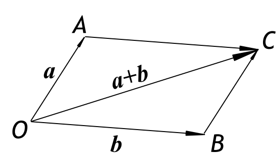

图 1-3

力学中的力是一个有大小、有方向的量，可以解释为向量. 力的加法同样适用”平行四边形法则”. 区别在于，力的作用点 (图 1-3 中的 O 点) 是力的一个要素，而在向量的加法中 O 点是可以随意选择的.

命题 1.1 向量的加法满足以下的性质：

(1) 交换率： $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;

(2) 结合率： $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;

(3) 对任何 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$, 有 $\mathbf{a}+0=\mathbf{a}$;

(4) 对任何 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$, 有 $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0$.

证明 向量加法的交换率可以由图 1-3 和向量加法的三角形法则直接得到.

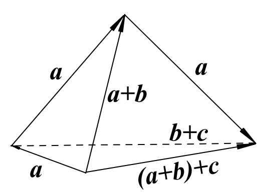

图 1-4

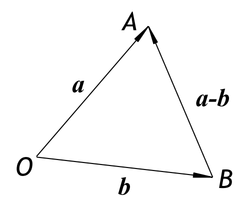

图 1-5

向量的结合率可有图 1-4 直接得到：

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

设 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\mathbf{0}$, 所以有

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{a};$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}.\ \square$$

定义 1.3 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$. 我们定义向量的减法为： $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

如图 1-5, 设 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, 则有

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=(-\mathbf{b})+\mathbf{a}==\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}.$$

于是，空间中两个向量相加和相减得到的还是向量. 向量空间 $\mathbb{V}$ 对向量的加、减运算封闭。

1.2 向量的数量乘积

我们知道，一个向量由它的长度和方向所唯一决定.

定义 1.4 记 $\mathbb{R}$ 为全体实数构成的集合. 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 我们定义 $\lambda\mathbf{a}$ 是满足如下条件的唯一向量： (1) 它的长度为 $|\lambda||\mathbf{a}|$; (2) 当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反；当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时，规定 $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$. 我们称向量 $\lambda\mathbf{a}$ 是实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的数量乘积.

从几何上看，空间中两个非零的向量 (有向线段) $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行，当且仅当存在一个非零的实数 λ，使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ 成立.

由定义知，实数和向量的数量乘积得到的还是一个向量. 故向量空间 $\mathbb{V}$ 对数量乘积运算也是封闭的.

命题 1.2 实数和向量的乘积满足以下的性质：

(1) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$;

(2) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;

(3) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;

(4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

证明 性质 (1) 和 (2) 是定义 1.4 的直接推论，等式两边的向量有相同的长度和方向.

我们先证性质 (3). 如果 λ, μ 和 $(\lambda+\mu)$ 三个数中至少有一个数为 0, 则性质 (3) 显然成立. 如果这三个数均非零，则只有两种情形发生： (i) λ 和 μ 同号；这时两个向量 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 和 $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$ 有相同的长度和方向，性质 (3) 成立. (ii) λ 和 μ 异号；我们可不妨设 λ 与 $\lambda + \mu$ 同号. 这时， $-\mu$ 和 $\lambda + \mu$ 同号，由 (i) 知道

$$-\mu\mathbf{a} + (\lambda + \mu)\mathbf{a} = (-\mu + \lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}.$$

故 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, 性质 (3) 依然成立.

以下我们证明性质 (4). 如果 λ, $\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{b}$ 中有一个为零，则性质 (4) 显然成立. 以下假设它们均非零. 如果两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行，则存在非零实数 μ, 使得 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 这时应用性质 (2) 和 (3), 有

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda((1+\mu)\mathbf{a}) = (\lambda(1+\mu))\mathbf{a} = (\lambda+\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},$$

性质 (4) 成立. 如果两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行，令 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. 我们分别在直线 OA 和 OB 上找到唯一的点 C 和 D, 使得

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\mathbf{a},\ \ \overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OB}=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

图 1-6(a) 和图 1-6(b) 分别对应 $\lambda>0$ 和 $\lambda<0$ 的情形.

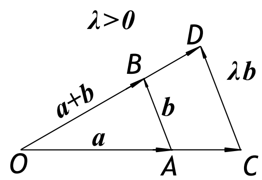

图 1-6(a)

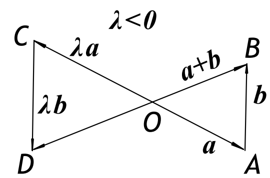

图 1-6(b)

由于 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 两组对应边成比例，它们是相似三角形. 故 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\mathbf{b}$. 于是,

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}.$$

性质 (4) 得证. $\square$

由此可见, 数量乘积的分配率 (性质 (4)) 对应平面几何中的相似三角形边长成比例的定理。

1.3 向量的分解

定义 1.5 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 为一组向量. 如果在取定共同起点 O 后, 构成这些向量的有向线段均落在同一条直线上，我们就称它们为 **共线** （或 **平行** ）的向量.

定义 1.6 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 为一组向量. 如果在取定共同起点 O 后, 构成这些向量的有向线段均落在同一张平面上，我们就称它们为 **共面** 的向量.

容易验证，向量的共线或共面关系与共同起点 O 的选取无关. 共线的向量一定共面.

设 $\mathbf{a}$ 是一个非零向量. 令 $\mathbb{L}(\mathbf{a})$ 是所有与 $\mathbf{a}$ 共线的向量构成的集合. 当我们取定一点 O 作为共同起点时，这些共线向量的的终点构成一条直线 ℓ. 于是，有

$$\mathbb{L}(\mathbf{a})=\{\lambda\mathbf{a}\mid\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

显然，对任何 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\mathbf{b}+\mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$ 和 $\lambda\mathbf{b} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$. 我们称 $\mathbb{L}(\mathbf{a})$ 为非零向量 $\mathbf{a}$ 生成的向量空间 $\mathbb{V}$ 的一个 (1 维的) 子空间.

当两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \neq 0$ 时，我们记 $\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}=\lambda$, 它是一个实数. 由命题 1.2 容易得到，对任何 $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a})$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, \quad \frac{\lambda\mathbf{b}}{\mathbf{a}}=\lambda\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}.$$

命题 1.3 两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ 和 μ, 使得

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=0.$$

证明 设两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线. 如果 $\mathbf{a}=\mathbf{b}=0$, 则有 $1\mathbf{a}+1\mathbf{b}=0$. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中至少有一个向量非零，可不妨设 $\mathbf{a} \neq 0$. 由于 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 共线，则存在实数 λ, 使得 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$. 这时， $\lambda\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}=0$ 成立. 必要性得证. 反之，如果存在不全为零的实数 λ 和 μ, 使得 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=0$ 成立. 我们不妨设 $\mu \neq 0$. 则有 $\mathbf{b}=-\dfrac{\lambda}{\mu}\mathbf{a}$, 故 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$ 共线. 充分性得证. $\square$

推论 1.1 如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，且 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=0$, 则必有 $\lambda=\mu=0$.

设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是两个不共线的向量. 令 $\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是所有与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共面的向量构成的集合. 我们取定一个共同的起点 O ，则这些共面向量的终点构成一张平面 σ. 令 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$. 任给 $\mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 存在 $C \in \sigma$ 使得 $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$. 由于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不共线，两直线 OA 和 OB 只交于一点 O. 过点 C 分别作 OA 和 OB 的平行线，交 OA 于 D, 交 OB 于 E (参见图 1-7).

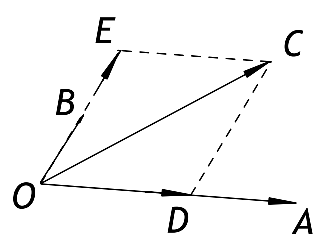

图 1-7

由于 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 共线， $\overrightarrow{OE}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线，故存在实数对 (λ, μ), 使得 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OE}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\mathbf{b}$. 由向量加法的 "平行四边形法

则”，我们得到

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

反之，对任何实数对 (λ, μ), 我们令 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$. 由向量加法的“平行四边形法则”推出， C 点必落在两直线 OA 和 OB 所确定的平面上．故 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 于是，我们有

$$\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

容易验证，对任何 $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\mathbf{c} + \mathbf{d} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 和 $\lambda\mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. 我们称 $\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 为不共线向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 生成的向量空间 $\mathbb{V}$ 的一个 (2 维的) 子空间.

命题 1.4 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面，且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，则存在唯一的实数对 (λ, μ), 使得 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

证明 我们只需证明唯一性．如果存在两个实数对 (λ, μ) 和 (λ', μ'), 使得

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b},$$

则有 $(\lambda - \lambda')\mathbf{a} + (\mu - \mu')\mathbf{b} = 0$. 因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，由推论 1.1 得到 $\lambda - \lambda' = 0$ 和 $\mu - \mu' = 0$. 于是，这样的实数对 (λ, μ) 存在且唯一． □

命题 1.5 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, ν, 使得

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = 0.$$

证明 先证必要性．设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面．如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线，则由命题 1.3 知，存在不全为零的实数 λ 和 μ, 使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = 0$. 这时，我们有 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = 0$, 必要性成立．如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线，由命题 1.4 知，存在实数 λ 和 μ, 使得 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. 故 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = 0$, 必要性也成立. 现证充分性. 设存在不全为零的实数 λ, μ, ν, 使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = 0$. 我们可不妨设 $\nu \neq 0$. 这时，有

$$\mathbf{c} = -\frac{\lambda}{\nu}\mathbf{a} - \frac{\mu}{\nu}\mathbf{b}.$$

如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共线，可不妨设 $\mathbf{a} = \rho\mathbf{b}$, 则有 $\mathbf{c} = -(\frac{\lambda}{\nu}\rho + \frac{\mu}{\nu})\mathbf{b}$. 这时 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共线，必共面．如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不共线，则 $\mathbf{c} \in \mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 这时 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 也共面．充分性得证． □

推论 1.2 如果 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 不共面，且 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=0$, 则必有 $\lambda=\mu=\nu=0$.

定义 1.7 设 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$ 为一组向量. 如果向量 $\mathbf{b}$ 可以表成

$$\mathbf{b}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots k_r\mathbf{a}_r,$$

其中 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ 为实数，我们就称向量 $\mathbf{b}$ 可以分解成向量组 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r\}$ 的一个线性组合.

命题 1.6 如果 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为不共面的向量，则空间中的任何一个向量均可唯一地分解成 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 的一个线性组合.

证明 在空间中取定一点 O 作为向量的共同起点. 我们记由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所张成的平面为 Σ. 现设 $\mathbf{d}=\overrightarrow{OA}$ 为空间中的任意向量. 过 A 作 $\mathbf{c}$ 的平行线，交平面 Σ 于 B(参见图 1-8).

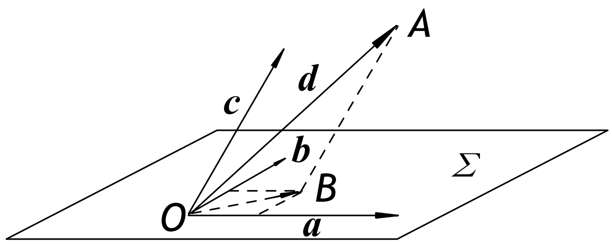

图 1-8

则向量 $\overrightarrow{OB}$ 落在平面 σ 上，并且向量 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\mathbf{d}$ 平行. 于是，由命题 1.4 知，存在实数 λ, μ 和 ν, 使得

$$\overrightarrow{OB}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\ \ \overrightarrow{BA}=\nu\mathbf{c}.$$

由此可得

$$\mathbf{d}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}.$$

假如 $\mathbf{d}$ 又可分解成 $\mathbf{d}=\lambda'\mathbf{a}+\mu'\mathbf{b}+\nu'\mathbf{c}$, 则有

$$(\lambda-\lambda')\mathbf{a}+(\mu-\mu')\mathbf{b}+(\nu-\nu')\mathbf{c}=0.$$

因为 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 不共面，则由推论 1.2 推出 $\lambda=\lambda'$, $\mu=\mu'$ 和 $\nu=\nu'$. $\square$

定义 1.8 我们称空间中一组不共面的向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基. 取定向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 则任何向量 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$ 可以唯一表成

$$\mathbf{a}=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

的形式．我们称三元数组 (a_1,a_2,a_3) 为向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下的坐标.

我们记 $\mathbb{R}^3$ 为所有实数三元数组构成的集合．在 $\mathbb{R}^3$ 中我们定义以下的加法和数乘运算：

$$(a_1,a_2,a_3)+(a_1,a_2,a_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3);$$

$$\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

容易验证，以下的命题成立.

命题 1.7 设向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在一组基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下的坐标分别为 (a_1,a_2,a_3) 和 (b_1,b_2,b_3), λ 和 μ 为实数，则向量 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 的坐标为

$$(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3).$$

在取定 $\mathbb{V}$ 中的一组基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 后，便可定义 1-1 对应 $\phi:\mathbb{V}\to\mathbb{R}^3$ 如下：对任何向量 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$, 令 $\mathbf{a}=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$ ，定义

$$\phi(\mathbf{a})=(a_1,a_2,a_3).$$

由命题 1.7 知，这样定义的 1-1 对应 ϕ 拥有以下性质：

$$\phi(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\phi(\mathbf{a})+\mu\phi(\mathbf{b}),$$

称为向量空间 $\mathbb{V}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性同构．我们注意到，这样的同构与基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 的选取有关.

1.4 向量线性运算的应用

设 A 和 B 是空间中两个不同点．则 A,B,C 三点共线的充要条件是存在实数 $t\in\mathbb{R}$ 使得

$$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}.$$

每个实数 t 将唯一对应直线 AB 上的点 C(参见图 1-9).

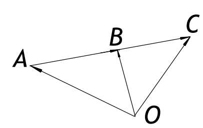

图 1-9

在空间中取定一点 O. 因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, 则方程 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ 等价于以下的向量方程:

$$\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

我们注意到，这个方程与 O 点的选取无关．于是，我们得到

命题 1.8 空间中三点 A,B,C 共线当且仅当存在实数 t 使得

$$\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

定义 1.9 设 A, B, C 是共线的三个不同点．我们定义 C 点关于 A, B 的分比为

$$(A,B;C)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

从图 1-9 容易看出，分比 $(A,B;C)$ 的取值范围为

$$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty).$$

当 A 和 B 固定时， C 点由它的分比所唯一决定．当 C 落在线段 $\overline{AB}$ 之外时，分比 $(A,B,C)<0$; 当 C 落在线段 $\overline{AB}$ 之内时，分比 $(A,B;C)>0$. 特别地， C 为线段 $\overline{AB}$ 的中点当且仅当 $(A,B;C)=1$.

当分比 $(A,B;C)=\lambda$ 时，从方程 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ 我们容易得到

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}. \tag{1.4.1}$$

以下我们给出向量线性运算的一些几何应用.

例 1.1 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是空间中的 n 个点．我们在空间中任意取定一点 O, 则

$$\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$$

是空间中的一个向量．于是，存在空间中唯一点 M, 它满足

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}). \tag{1.4.2}$$

容易验证，如果我们将上式中的点 O 换成另一点 O', 则 (1.4.2) 依然成立．这样， M 点与 O 点的选取无关，它由点 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 所

唯一决定. 我们称 M 为点组 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 的 **重心**. 在 (1.4.1) 中令 $O = M$, 我们得到

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} = 0. \tag{1.4.3}$$

换言之, $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 的重心是空间中满足向量方程 (1.4.3) 的唯一点 M.

空间中两点 A 和 B 的重心 M 恰是线段 AB 的中点.

三角形 ABC 的重心 M 定义为三顶点 $\{A, B, C\}$ 的重心，它的位置由方程

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

给出. 由于 BC 边上的中点 D 满足 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, 我们有

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}.$$

这说明, M 落在三角形 ABC 的中线 AD 上. 在上式中取 $O = M$, 我们立即知道 M 点将 AD 分割成长度比为 $2:1$ 的两段. 同样道理, M 也落在三角形的另外两条中线上, 并将中线分割成长度比为 $2:1$ 的两段. 于是, 三角形的重心恰为三中线的交点.

例 1.2 设 D, E 和 F 分别是三角形 ABC 的边 AB, BC 和 CA 上的点 (参见图 1-10).

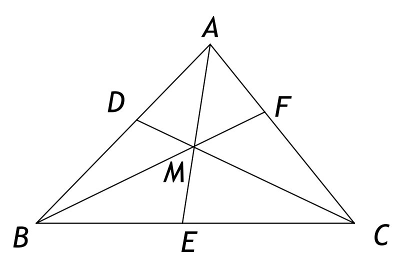

图 1-10

我们用向量方法证明以下的

Ceva 定理 三直线 AE, BF 和 CD 交于一点的充要条件是

$$(A, B; D)(B, C; E)(C, A; F) = 1.$$

证明 先证必要性. 设三条直线 AE, BF 和 CD 交于一点 M. 我们记

$$(A,B;D)=\lambda,\ \ (B,C;E)=\mu,\ \ (C,A;F)=\nu.$$

由于 A, B 和 D 三点共线，且 $(A,B;D)=\lambda$, 我们参照 (1.4.1) 并取 $O=M$, 得到

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{MA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{MB}. \tag{1.4.4}$$

因为 M,D,C 三点共线, 我们可以找到实数 x 使得 $\overrightarrow{MD}=-\dfrac{x}{1+\lambda}\overrightarrow{MC}$. 代入方程 (1.4.4), 我们得到向量方程

$$\overrightarrow{MA}+\lambda\overrightarrow{MB}+x\overrightarrow{MC}=0. \tag{1.4.5}$$

同样道理，利用 $(B,C;E)=\mu$ 和 $(C,A;F)=\nu$, 我们可以找到实数 y 和 z, 使得

$$y\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\mu\overrightarrow{MC}=0; \tag{1.4.6}$$

$$\nu\overrightarrow{MA}+z\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0. \tag{1.4.7}$$

从 (1.4.5) 和 (1.4.6) 中消去 $\overrightarrow{MB}$, 从 (1.4.5) 和 (1.4.7) 中消去 $\overrightarrow{MA}$, 我们得到

$$(1-\lambda y)\overrightarrow{MB}+(x-\lambda\mu)\overrightarrow{MC}=0,\ \ (\lambda\nu-z)\overrightarrow{MB}+(x\nu-1)\overrightarrow{MC}=0.$$

因为 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MC}$ 中任何两个互不共线，故有

$$1-\lambda y=x-\lambda\mu=\lambda\nu-z=x\nu-1=0.$$

由此推出

$$x=\frac{1}{\nu},\ \ y=\frac{1}{\lambda},\ \ z=\frac{1}{\mu},\ \ \lambda\mu\nu=1.$$

于是，必要性得证.

在证明充分性之前，我们先求得交点 M 的位置. 因为 $\lambda\mu\nu=1$, 我们可以找到非零实数 a,b,c, 使得 $\lambda=b/a$, $\mu=c/b$ 和 $\nu=a/c$. 取定空间中的一点 O. 由于

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM},\ \ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},\ \ \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM},$$

将这些数值和向量代入方程 (1.4.5), 我们得到

$$\overrightarrow{OM}=\frac{a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}+c\,\overrightarrow{OC}}{a+b+c}. \tag{1.4.8}$$

以下我们证明充分性．设 D, E 和 F 分别是三角形 ABC 的边 AB, BC 和 CA 上的点，使得 $(A,B;D)(B,C;E)(C,A;F)=1$. 我们取非零实数 a, b 和 c, 使得

$$(A,B;D)=\frac{b}{a},\ \ (B,C;E)=\frac{c}{b},\ \ (C,A;F)=\frac{a}{c}.$$

由公式 (1.4.1), 我们有

$$\overrightarrow{OD}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}.$$

令 M 是空间中满足向量方程 (1.4.8) 的唯一点．则有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{a+b}{a+b+c}\overrightarrow{OD}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}.$$

于是， M 点落在直线 DC 上．同样道理， M 也落在直线 AE 和 BF 上．这样，三直线 AE, BF 和 CD 交于一点 M. 充分性得证． □

习题 1-1

1. 设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 两两不共线，且满足

$$\lambda_1\mathbf{a}+\mu_1\mathbf{b}+\nu_1\mathbf{c}=0,\ \ \lambda_2\mathbf{a}+\mu_2\mathbf{b}+\nu_2\mathbf{c}=0,$$

其中 $\{\lambda_1,\mu_1,\nu_1\}$ 和 $\{\lambda_2,\mu_2,\nu_2\}$ 为两组不全为零的实数。证明：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

2. 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ 为任意向量．证明：存在不全为零的实数 λ, μ, ν, ω 使得

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}+\omega\mathbf{d}=0.$$

3. 设 O 为空间中的一点．证明： A, B, C 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ 和 ν, 使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=0,\ \ \lambda+\mu+\nu=0.$$

4. 设 A, B, C 为平面 σ 上不共线的三点． O 是空间中一点．则空间中一点 D 落在平面 σ 上的充要条件是存在实数 λ, μ 和 ν, 使得

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC},\ \ \lambda+\mu+\nu=1.$$

5. 设 O 为空间中的一点. 证明: A, B, C, D 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, ν 和 ω, 使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}=0,\ \ \lambda+\mu+\nu+\omega=0.$$

6. 设 $\mathbb{P}$ 是以 O 点处的三个不共面的向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 为边的平行六面体. 设 M 为 $\mathbb{P}$ 的重心. 求向量 $\overrightarrow{OM}$.

7. 设 A, B, C, D 为空间中四点. 设 M_1, M_2, M_3 和 M_4 分别是线段 AB, BC, CD 和 DA 的中点, 它们各不相同. 证明: $M_1M_2M_3M_4$ 构成一个平行四边形, 并且它的重心与四边形 $ABCD$ 的重心相同.

8. 证明: 平面上一个正 n 边形的重心恰为其外接圆的圆心.

9. 已经在图 1-10 中三直线 AE, BF 和 CD 交于一点 M. 已知 $(A,B;D)=\lambda$, $(B,C;E)=\mu$, $(C,A;F)=\nu$ 和 $\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}$. 求: k_1,k_2,k_3.

10. 将空间中的一组点 S 随意分成两组点 S_1 和 S_2. 设 S, S_1 和 S_2 的重心分别是 M, M_1 和 M_2. 证明: M 落在线段 M_1M_2 上, 并且 $(M_1,M_2;M)=|S_2|:|S_1|$, 其中 $|S_1|$ 和 $|S_2|$ 分别是 S_1 和 S_2 中点的个数.

11. 设三角形 ABC 顶点 A, B, C 的对应边边长分别为 a, b, c. 证明: 三角形三个角平分线交于一点 M, 并且 M 的位置由以下向量方程给出:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OB}}{a+b+c}.$$

12. 如图 1-11 所示, D, E, F 分别是三角形 ABC 的三个边 AB, BC 和 CA 上的点. 试用向量的方法证明 **Menelaus** 定理: $(A,B;D)(B,C;E)(C,A;F)=-1$.

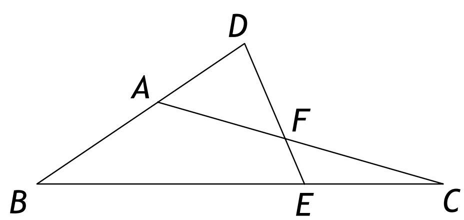

图 1-11

§2 向量的内积、外积和体积

2.1 向量的内积

设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为空间中的两个非零向量. 记 $<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ 为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的夹角.

定义 2.1 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 非零，我们定义它们的 **内积** 为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>.$$

如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中有一个为零，它们之间的夹角不能确定，这时我们规定内积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

当两向量满足 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 时，我们称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直，记为 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

设 e 是一个单位向量. 由图 2-1 可见，任何向量 $\mathbf{a}\in\mathbb{V}$ 均可以唯一分解成

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_e+\mathbf{a}_e^{\perp}, \tag{2.1.1}$$

其中 $\mathbf{a}_e\parallel e$, $\mathbf{a}_e^{\perp}\perp e$. 我们称 (2.1.1) 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的正交分解，称 $\mathbf{a}_e$ 为为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的水平投影，称 $\mathbf{a}_e^{\perp}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的垂直投影.

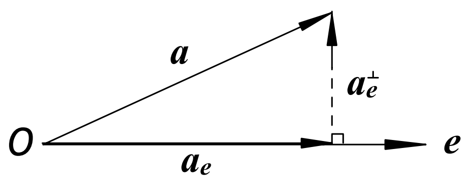

图 2-1

如果 $\mathbf{b}=\mathbf{b}_e+\mathbf{b}_e^{\perp}$ 是向量 $\mathbf{b}$ 关于 e 的正交分解，则有

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(\mathbf{a}_e+\mathbf{b}_e)+(\mathbf{a}_e^{\perp}+\mathbf{b}_e^{\perp}).$$

由于 $(\mathbf{a}_e+\mathbf{b}_e)\parallel e$, $(\mathbf{a}_e^{\perp}+\mathbf{b}_e^{\perp})\perp e$, 故有

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})_e=\mathbf{a}_e+\mathbf{b}_e,\ \ (\mathbf{a}+\mathbf{b})_e^{\perp}=\mathbf{a}_e^{\perp}+\mathbf{b}_e^{\perp}. \tag{2.1.2}$$

于是，两向量之和的水平投影等于两向量水平投影之和；两向量之和的垂直投影等于两向量垂直投影之和. 此外，从图 1-12 我们得到

$$\mathbf{a}_e=(|\mathbf{a}|\cos<\mathbf{a},e>)e=(\mathbf{a}\cdot e)e. \tag{2.1.3}$$

命题 2.1 向量的内积满足以下性质：

(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;

(2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$;

(3) $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

(4) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.

证明 性质 (1) 和 (2) 由内积的定义不证自明.

我们先证性质 (3). 不妨设 λ, $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均非零. 当 $\lambda>0$ 时，有

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos<\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}>=\lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b});$$

当 $\lambda<0$ 时，有

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=|\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos<\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}>=(-\lambda)|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\pi-<\mathbf{a},\mathbf{b}>)=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

故性质 (3) 成立.

以下我们证明内积的分配率 (4) 成立. 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为任意向量. 我们取实数 λ 和单位向量 e, 使得 $\mathbf{c}=\lambda e$. 对公式 (2.1.3) 应用性质 (3), 我们得到公式

$$\mathbf{a}_e\cdot e=\mathbf{a}\cdot e.$$

利用这个公式，以及 (2.1.2) 和 (2.1.3)，我们得到

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot e=(\mathbf{a}+\mathbf{b})_e\cdot e=(\mathbf{a}_e+\mathbf{b}_e)\cdot e=[((\mathbf{a}\cdot e)+(\mathbf{b}\cdot e))e]\cdot e=\mathbf{a}\cdot e+\mathbf{b}\cdot e.$$

两边同乘以 λ, 便得到性质 (4). □

以下我们给出向量内积的一些应用.

例 2.1 设三角形 ABC 三个角 A, B, C 所对应的边长分别为 a, b, c. 令 $\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$. 因为 $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, 并且

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos<\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}>=ab\cos C,$$

我们利用内积的分配率得到

$$c^2=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

这正是三角形的余弦定理. □

例 2.2 设三角形 ABC 的两条高 BD 和 CE 交于一点 O. 我们记

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},\ \ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},\ \ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

则有

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,\ \ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

于是，我们得到

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0.$$

这样我们证明了：任意三角形三高交于一点. □

定义 2.2 我们称两两垂直的单位向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为空间的一个单位正交基.

命题 2.2 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 空间中的一个单位正交基，则对任何一个向量 $\mathbf{c}$ 有

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot e_1)e_1 + (\mathbf{c} \cdot e_2)e_2 + (\mathbf{c} \cdot e_3)e_3. \tag{2.1.4}$$

证明 因为 e_1, e_2, e_3 不共面，则任何向量 $\mathbf{c}$ 均可分解成

$$\mathbf{c} = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3.$$

方程两边分别与 e_1, e_2 和 e_3 做内积，并利用内积的分配率，我们得到 $\lambda = \mathbf{c} \cdot e_1$, $\mu = \mathbf{c} \cdot e_2$ 和 $\nu = \mathbf{c} \cdot e_3$. □.

命题 2.3 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间中的一个单位正交基。设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 在这组基下的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3). 则有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{2.1.5}$$

证明 因为

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1,\ \ e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0, \tag{2.1.6}$$

我们利用分配率得到

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \cdot (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

□

2.2 向量的外积

设 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一组基. 我们取定一个共同的起点 O. 则由图 2-2 可见，以下两种情形必有而且仅有一种情形发生：

(1) 当我们将右手拇指指向 $\mathbf{a}$ 的方向，食指指向 $\mathbf{b}$ 的方向时，可以自然地将中指指向 $\mathbf{c}$ 的方向；

(2) 当我们将左手拇指指向 $\mathbf{a}$ 的方向，食指指向 $\mathbf{b}$ 的方向时，可以自然地将中指指向 $\mathbf{c}$ 的方向.

图 2-2

如果情形 (1) 发生，我们就称 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 为右手系的基 (标架)；如果情形 (2) 发生，我们就称 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 为左手系的 (标架).

我们注意到，一组基是右手系还是左手系，是与基向量的排列顺序密切相关的. 容易验证, 如果 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 是右手系, 则 $\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\}$ 和 $\{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ 还是右手系，而 $\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\}$, $\{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\}$ 和 $\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}$ 则是左手系.

定义 2.2 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 为空间中的两个向量. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行，我们规定 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 为零向量. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行，我们定义向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 为满足以下条件的唯一向量：

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ 均垂直；

(2) $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ 构成一个右手系的标架；

(3) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin < \mathbf{a},\mathbf{b} >$.

我们称向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的外积.

设 e 为单位向量. 我们在空间中取定一点 O, 则存在唯一一张过 O 点并与 e 垂直的平面 Σ. 对任何一个与 e 垂直的向量 $\mathbf{a}$, 存在 Σ 上的唯一一点 A, 使得 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. 我们以 O 点为中心将向量 $\overrightarrow{OA}$ 右旋 90°, 得到一个向量 $\rho_e(\mathbf{a})$(参见图 2-3).

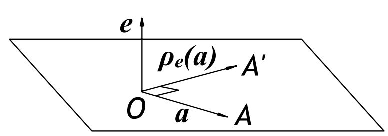

图 2-3

显然，向量 $\rho_e(\mathbf{a})$ 与 O 点的选取无关. 设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是落在 e 垂直平面 Σ 上的两个向量. 根据平行四边形法则， $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 也落在平面 Σ 上. 因为 ρ_e 将整个平行四边形右旋 $90°$, 从图 2-3 可见，

$$\rho_e(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \rho_e(\mathbf{a}) + \rho_e(\mathbf{b}). \tag{2.2.1}$$

命题 2.3 设 e 为单位向量， $\mathbf{a}$ 为任意向量， $\mathbf{a}_e^{\perp}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的垂直投影. 则有

$$e \times \mathbf{a} = \rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp}), \tag{2.2.2}$$

其中 $\mathbf{a}_e^{\perp}$ 是向量 $\mathbf{a}$ 关于 e 的垂直投影.

证明 如果 $\mathbf{a}$ 与 e 平行，则 $e \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp})$, 命题成立. 如果 $\mathbf{a}$ 与 e 不平行，则 $e \times \mathbf{a}$ 和 $\rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp})$ 均垂直于 e 和 $\mathbf{a}$. 由于

$$|e \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \sin <\mathbf{a}, e> = |\mathbf{a}_e^{\perp}| = |\rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp})|,$$

并且 $\{e, \mathbf{a}, \rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp})\}$ 也是右手系向量组，故 $e \times \mathbf{a} = \rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp})$. □

命题 2.4 向量的外积满足以下的性质：

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;

(2) $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;

(3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

证明 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行，则性质 (1) 和 (2) 显然成立. 如果 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 不平行，容易验证 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 和 $-\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ 和 $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 有相同的长度和方向. 故性质 (1) 和 (2) 也成立.

我们来证明性质 (3). 取单位向量 e 和实数 λ 使得 $\mathbf{c} = \lambda e$. 利用 (2.2.2), (2.1.2), (2.2.1) 和性质 (2) 我们得到

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda e \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\rho_e((\mathbf{a}+\mathbf{b})_e^{\perp}) = \lambda\rho_e((\mathbf{a}_e^{\perp} + \mathbf{b}_e^{\perp})$$

$$= \lambda(\rho_e(\mathbf{a}_e^{\perp}) + \rho_e(\mathbf{b}_e^{\perp})) = \lambda(e \times \mathbf{a} + e \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}.$$

再利用 (1), 我们得到性质 (3). □.

命题 2.5 设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为向量空间中的一个右手系的单位正交基. 设向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在这组基下的坐标分别为 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3). 则向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 在这组基下的坐标为

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

证明　因为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为右手系的单位正交基，则有

$$e_1 \times e_2 = e_3,\ \ e_2 \times e_3 = e_1,\ \ e_3 \times e_1 = e_2. \tag{2.2.3}$$

利用命题 2.4 我们得到

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3. \tag{2.2.4}$$

□

命题 2.6　设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为空间中的三个向量．则有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

证明　取实数 λ 和单位向量 e_1, 使得 $\mathbf{c} = \lambda e_1$. 任取一个与 e_1 垂直的单位向量 e_2, 并令 $e_3 = e_1 \times e_2$. 则 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 构成空间中的一个右手系的单位正交基．令 $\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$，　$\mathbf{b} = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$. 利用 (2.2.4) 我们得到

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times e_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)e_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)e_3.$$

通过直接计算，我们得到

$$(\mathbf{a} \cdot e_1)\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot e_1)\mathbf{a} = (a_1b_2 - a_2b_1)e_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times e_1.$$

在等式两边乘以 λ, 我们便完成了命题的证明．　□

2.3 向量的体积

定义 2.3　设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为三个向量．我们称

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

为它们的体积.

命题 2.7　设 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中一个右手系的单位正交标架．设向量 $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 在这组标架下的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) 和 (c_1, c_2, c_3). 则有

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \tag{2.3.1}$$

证明 由命题 2.5，我们有

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)e_1+(a_3b_1-a_1b_3)e_2+(a_1b_2-a_2b_1)e_3.$$

由于 $\mathbf{c}=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$，利用 (2.1.5) 直接计算，我们得到公式 (2.3.1). □

为了简便起见，我们定义行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1. \quad (2.3.2)$$

容易验证，行列式满足以下性质：
(1) 如果我们将行列式中的两个列对换，则行列式仅差一个负号：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.3)$$

(2) 如果我们将行列式中的列进行轮换，则行列式不变：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.4)$$

(3) 行列式对每个固定的列是线性的．以第一列为例，我们有：

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1+\mu b_1 & c_1 & d_1 \\ \lambda a_2+\mu b_2 & c_2 & d_2 \\ \lambda a_3+\mu b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.5)$$

(4) 将行列式的列变成行，则行列式不变：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.6)$$

利用性质 (4)，我们知道，行列式的性质 (1), (2) 和 (3) 对行作变换时也一样成立.

由 (2.3.1) 和行列式的定义，我们得到

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.7)$$

利用 (2.3.7) 和行列式的以上性质，我们直接得到以下命题.

命题 2.8 向量的体积满足以下性质：

(1) 反称性： $[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]=[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}]=[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}]=-[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$;

(2) 轮换对称性： $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]=[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]$;

(3) 对每个变量的线性性, 例如：$[\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]=\lambda[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]+\mu[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]$.

推论 2.1 三个向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面的充要条件是 $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0$.

证明 先证必要性. 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面，则其中的一个向量可以表成另外两个向量的线性组合. 不妨设 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$. 因为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均垂直，所以

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=0.$$

故必要性成立. 此外，对三个不共面的向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 来说， $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ 构成向量空间的一组基. 故向量 $\mathbf{c}$ 一定可以表成 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的形式，其中 $\nu\neq 0$. 这时必有

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\nu|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2\neq 0.$$

于是，如果 $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0$, 则 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 必共面. 故充分性也成立. □

以下我们考察向量体积的几何意义. 设 $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ 为三个不共面的向量. 则它可以构成空间中的一个平行六面体 (参见图 2-4).

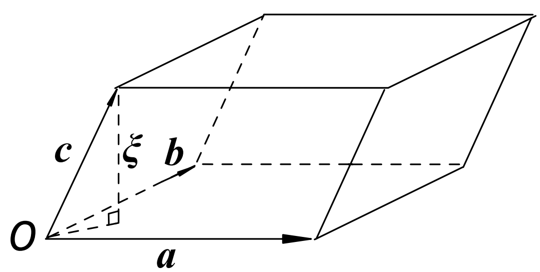

图 2-4

由向量外积的定义，有

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin<\mathbf{a},\mathbf{b}>\xi,$$

其中 ξ 是与向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 垂直的单位向量，并且 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \xi)$ 构成一个右手系．于是，

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin < \mathbf{a}, \mathbf{b} > (\xi \cdot \mathbf{c}).$$

由于 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ 是向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 生成的平行四边形面积，而 $h = |\xi \cdot \mathbf{c}|$ 是平行六面体的高. 故：当 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为右手系标架时，$\xi \cdot \mathbf{c} > 0$, 这时 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ 恰为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 所构成的平行六面体的体积 V（底面积乘高）；当 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为左手系标架时，$\xi \cdot \mathbf{c} < 0$，这时 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -V$.

我们注意到，正是由于命题 2.8 中的性质 (2) 成立，我们知道一个平行六面体的三个“底面积乘高”的数值相等.

命题 2.9 对任意的四个向量有以下的 *Lagrange* 公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

证明：由体积的轮换对称性及命题 2.6, 有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}$$

$$= ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

□

2.4 向量代数在球面几何中的应用

空间中的球面是一个对称且优美的几何对象．设 $\mathbb{S}^2$ 是空间中的一个单位球面，它的中心在 O 点．球面 $\mathbb{S}^2$ 上的每一点，均对应它关于中心 O 的对称点 P'. P' 称为 P 的对径点.

设 P, Q 是 $\mathbb{S}^2$ 上两个非对径点，则 P 和 Q 唯一决定一个大圆弧 ℓ，使得 P 和 Q 落在 ℓ 上．这个大圆弧是 O,P,Q 三点所确定的平面与 $\mathbb{S}^2$ 的交．如果我们将大圆弧看成是球面上的“直线”，则球面上的两个非对径点唯一确定球面上的一条“直线”.

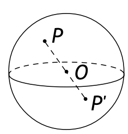

图 2-5(a)

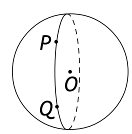

图 2-5(b)

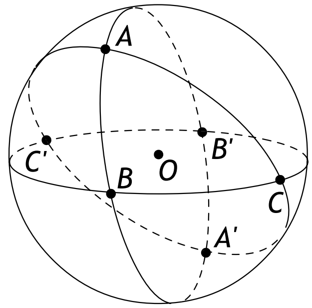

图 2-6

球面上任何两条大圆弧一定相交于两个对径点. 由三个部分大圆弧构成的三角形称为球面三角形. 设 ΔABC 是一个球面三角形. 则这三个大圆弧的另外三个交点为 A'， B' 和 C'，它们构成与 ΔABC 全等的球面三角形 $\Delta A'B'C'$ （参见图 2-6）.

我们记部分大圆弧 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{CA}$ 的长度分别为 a, b 和 c. 我们用同一个记号 A 表示大圆弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{AC}$ 所在平面之间的夹角的大小, B 为大圆弧 $\widehat{BC}$ 和 $\widehat{BA}$ 所在平面之间的夹角的大小，记 C 为大圆弧 $\widehat{CA}$ 和 $\widehat{CB}$ 所在平面之间的夹角的大小.

定理 2.1 球面 ΔABC 的面积 $\Delta = A + B + C - \pi$.

证明 过 A 点的两个大圆弧交于两个对径点 A 和 A'. 因为整个单位球面的面积为 4π，所以这两个交角为 A 的大圆弧切下的两个“西瓜瓢”部分的面积为 $(A/\pi) \cdot 4\pi = 4A$. 我们注意到， A 角的两个“西瓜瓢”， B 角的两个“西瓜瓢”和 C 角的两个“西瓜瓢”和在一起，恰好覆盖球面三角形 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 各三次，而覆盖球面上其余的部分一次．于是，有

$$4A + 4B + 4C = 2\Delta + 2\Delta' + 4\pi.$$

由于 $\Delta A'B'C'$ 和 ΔABC 的面积相等，故 $\Delta = A + B + C - \pi$. □

推论 2.2 球面三角形的内角和大于 π.

定理 2.2 设 ΔABC 为球面三角形，角 A， B 和 C 所对应的三边边长分别为 a, b 和 c. 则有以下

(1) 正弦定理： $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$;

(2) 余弦定理： $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

证明 设 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. 则 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为单位向量.

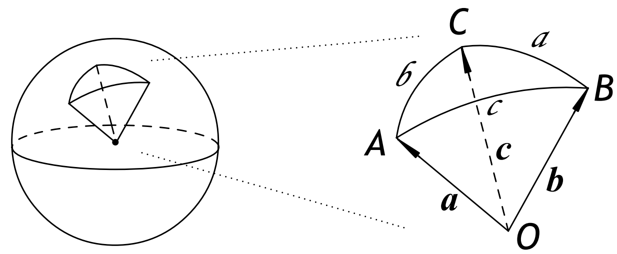

图 2-7

从图 2-7 我们得到以下的夹角公式

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}>=c,\ \ <\mathbf{b},\mathbf{c}>=a,\ \ <\mathbf{c},\mathbf{a}>=b; \tag{2.4.1}$$

$$<\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c}>=A,\ \ <\mathbf{b}\times\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c}>=B,\ \ <\mathbf{c}\times\mathbf{a},\mathbf{c}\times\mathbf{b}>=C. \tag{2.4.2}$$

我们先证正弦定理. 由命题 2.6, 我们得到

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\mathbf{a};$$

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]\mathbf{b};$$

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}.$$

由此推出

$$|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})|=|(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=|(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})|. \tag{2.4.3}$$

由 (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) 和向量外积的定义，我们得到

$$\sin c\sin b\sin A=\sin c\sin a\sin B=\sin b\sin a\sin C.$$

正弦定理得证.

以下我们证明余弦定理. 由 *Lagrange* 公式，我们有

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}). \tag{2.4.4}$$

由夹角公式 (2.4.1), (2.4.2), (2.4.4) 和内积的定义，我们得到

$$\sin a\sin b\cos A=\cos c-\cos a\cos b.$$

于是，余弦定理得证． □

利用球面三角形的面积公式，可以证明以下的

定理 2.3（欧拉公式） 设凸多面体 $\mathbb{P}$ 顶点个数为 v, 棱的个数为 e，面的个数为 f，则有 $v-e+f=2$.

证明 多面体的每个面是多边形．一条对角线可将多边形分割成两个多边形，这时棱和面各增加一个，而顶点个数不变，所以 $v-e+f$ 不变．利用对角线我们将多面体的每个面分割成三角形，而 $v-e+f$ 没有改变．于是，我们可以不妨假定多面体 $\mathbb{P}$ 的所有面由三角形构成．在 $\mathbb{P}$ 的内部取一点 O，令 $\mathbb{S}^2$ 为以 O 为中心的单位球面．利用以 O 为中心的射线将多面体 $\mathbb{P}$ 的表面投影到球面 $\mathbb{S}^2$ 上，多面体每个三角形的面成为 $\mathbb{S}^2$ 上的球面三角形．于是，整个球面 $\mathbb{S}^2$ 被这些球面三角形构成的球面三角地图所覆盖．这个地图共有 v 个顶点， e 条棱和 f 个面．设 $\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_f\}$ 为所有的面，每个面 Δ_i 的三个内角为 α_i, β_i 和 γ_i. 由面积公式，有 $\Delta_i=\alpha_i+\beta_i+\gamma_i-\pi$. 于是，有

$$4\pi=\sum_{i=1}^{f}\Delta_i=\sum_{i=1}^{f}(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)-f\pi.$$

由于所有这些球面三角形的内角加在一起等于 $2\pi v$, 所以 $4\pi=2\pi v-f\pi$，即 $2v-f=4$. 因为每个面有三条棱，于是 f 个面应有 $3f$ 条棱．但每条棱恰属于两个面，这样 $3f$ 恰好将每条棱数了两次，故 $3f=2e$. 由此得到 $v-e+f=v-f/2=2$. □

习题 1-2

1. 试用向量法证明：平行四边形四边的平方和等于对角线的平方和.

2. 试用向量法证明：三角形三中线长度的平方和等于三边长度平方和的 $3/4$.

3. 设 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 为三个不共面的向量. 证明: 如果向量 $\mathbf{d}$ 满足 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}=0$, 则 $\mathbf{d}$ 必为零向量.

4. 设四面体 $ABCD$ 的两对对棱互相垂直．试用向量法证明：四面体的另一对对棱也垂直，并且三对对棱长度的平方和相等.

5. 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为一个正 n 边形.

(i) 证明向量方程
$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots\overrightarrow{A_nA_1}=0.$$

(ii) 利用 (i) 来证明以下恒等式

$$1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}=0;$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}=0.$$

6. 证明：对任意向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, 以下的 Jacobi 恒等式成立：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=0.$$

7. 证明：$|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$, 且等式成立当且仅当 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 互相垂直，或者其中有一个为零向量.

8. 证明：

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]\mathbf{c}-[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\mathbf{d}=[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}]\mathbf{b}-[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]\mathbf{a}.$$

9. 证明：对任意向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, 有

$$[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]\mathbf{a}+[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{d}]\mathbf{b}+[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]\mathbf{c}+[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]\mathbf{d}=0.$$

10. 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为三个不共面的向量. 证明：任何向量 $\mathbf{d}$ 可分解成为

$$\mathbf{d}=\frac{[\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}\mathbf{a}+\frac{[\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}\mathbf{b}+\frac{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}\mathbf{c}.$$

11. 设 a, b, c 和 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为任意的两组向量. 证明：

$$[a\times\mathbf{a},b\times\mathbf{b},c\times\mathbf{c}]=[a,b,\mathbf{b}][\mathbf{a},c,\mathbf{c}]-[a,c,\mathbf{c}][\mathbf{a},b,\mathbf{b}].$$

12. 证明：如果 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 共面，则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 也共面.

13. 证明：如果 $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 是一个标架，则 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ 是一个右手系标架.

14. 设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为三个不共面的向量. 证明：关于向量 x 的方程组

$$x\cdot\mathbf{a}=\lambda,\ \ x\cdot\mathbf{b}=\mu,\ \ x\cdot\mathbf{c}=\nu,$$

有唯一解，为

$$x=\frac{\lambda\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mu\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\nu\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}.$$

15. 试用立体几何的方法证明：四面体的四个“底面积乘高”相等。

16. 证明：将球面上半圆弧绕其直径旋转 α 角，得到的西瓜瓢面积为 4α. (提示：先考虑 $\mathbf{a}=2\pi q$ 的情形，其中 q 为有理数)