24 拓扑空间

拓扑学研究空间在连续形变下保持不变的性质。

在实数 $\mathbb{R}$ 上，一个映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in\mathbb{R}$ 处连续，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在某个 $\delta>0$ 使得

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{只要} \quad |y-x|<\delta.$$

更一般地，对 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射，我们可以定义连续性。我们想要推广连续性的概念，使

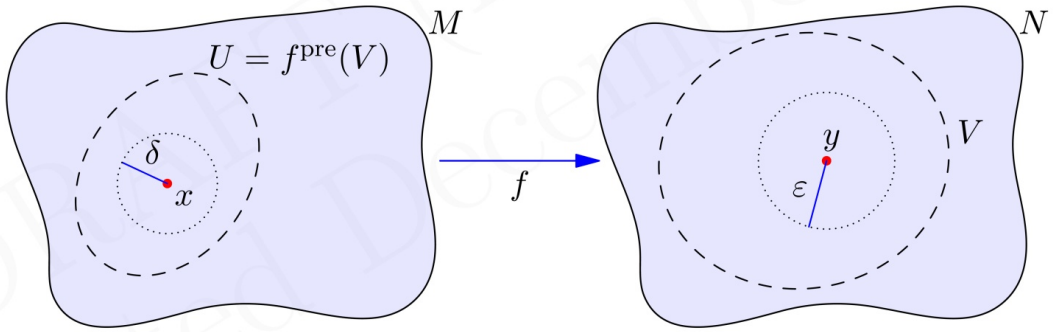


图 60: 映射的连续

得我们不再依赖于度量的定义。考察一下可以知道，这个条件等价于说，对任意的 $\varepsilon>0$，$E=f^{-1}(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ 含有某个包含 x_0 的开区间。事实上，对 $f^{-1}(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ 中的每个点 x，$(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ 含有某个包含 x 的开区间，所以 E 含有某个包含 x 的开区间。所以我们得到，开集的逆像是开集。这是连续性更恰当的定义，我们把连续性的概念建立在开集的基础上。

24.1 拓扑空间

定义 24.1. 设 X 是一个非空集合。X 的一些子集构成的集合 τ 称为 X 上的一个**拓扑** (topology)，如果 τ 满足下面的**拓扑公理** (topological axioms)

1. 全空间 X 和空集 $\emptyset$ 属于 τ。
2. (**任意并**) 任意多个 τ 中子集的并属于 τ。
3. (**有限交**) 有限多个 τ 中子集的交属于 τ。

一个集合 X 和其上的一个拓扑 τ 称为一个**拓扑空间** (topological space)，记为 (X,τ)。拓扑 τ 中的子集称为**开集** (open set)。如果没有混淆，我们通常在记号里忽略 τ。

例 24.2. 拓扑空间的例子非常多：

1. $\mathbb{R}^n$ **上的欧氏拓扑** $\mathcal{T}_e$。我们用 $\mathbb{E}^n$ 表示赋予欧氏拓扑的 $\mathbb{R}^n$。
2. **平凡拓扑** (trivial topology) 或**密集拓扑** (indiscrete topology) 中，只有全集和空集是开集。
3. **离散拓扑** (discrete topology) 中，每个子集都是开集。这是一个给定集合 X 上的最大可能的拓扑。如果一个集合 X 赋予离散拓扑，我们称之为**离散空间** (discrete space)。

4. 余有限拓扑 (finite-completement topology)$\mathcal{T}_f$。对于 $\mathbb{R}$，我们有 $\mathcal{T}_f = \{A \subset \mathbb{R} \mid A^c \text{ is finite}\}$。

5. 余可数拓扑 (countable-complement topology)$\mathcal{T}_c$。

6. 设 $X = \{A, B, C\}$，则
$$\Big\{\emptyset, X, \{A, B\}, \{B, C\}, \{B\}\Big\}$$
给出 X 上的一个拓扑。

问题 24.3. 给定一个 n 个元素的集合 X_n，X_n 上有多少个不同的拓扑？对 $n \leqslant 5$ 列举出所有可能的拓扑（相差一个置换下）。

7. 形如 (a, ∞) 或 $[a, \infty)$ 的集合 $(a \in \mathbb{R})$ 以及 $\mathbb{R}$ 和 $\emptyset$ 给出 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑。$\{(a, \infty)\}$ 和 $\{[A, \infty)\}$ 是否给出拓扑?

练习 24.4. 证明例24.2中所给出来的拓扑满足拓扑公理。

给定集合 X 上的两个拓扑 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$，我们称$\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 小 (smaller) 或$\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 大 (bigger)，如果 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$。换句话说，$\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 小，如果每个 $\mathcal{T}_1$ 开集都是 $\mathcal{T}_2$ 开的。我们也成 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗糙 (coarser) 或者 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 精细 (finer)。如果 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ 和 $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ 都不成立，我们说 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 无法比较 (non-comparable)。

练习 24.5. 比较 $\mathbb{R}$ 上如上拓扑的大小。

命题 24.6. 集合 U 是开集当且仅当对任何点 $x \in U$，存在开集 O 使得 $x \in O \subset U$。

证明. 如果 U 是开集，取 $O = U$ 即可。反之，如果对任何 $x \in U$ 存在开集 O_x 使得 $x \in O_x \subset U$，则有 $U = \bigcup_{x \in U} O_x$，所以 U 是开集。 □

度量拓扑

定义 24.7. 一个集合 X 上的度量 (metric) 或距离 (distance) 是指 $X \times X$ 上的实值函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$，对任意 $x, y, z \in X$，满足如下条件

1. (正定性) $d(x, y) \geq 0$，等式成立当且仅当 $x = y$。
2. (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$。
3. (三角不等式) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$。

集合 X 和其上的一个度量 d 称为一个度量空间 (metric space)，记为 (X, d)。

例 24.8. 欧氏空间在通常的距离之下是度量空间。对 $\mathbb{R}^n$，定义度量为
$$d((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
则容易证明 d 满足定义24.7的条件。

对度量空间 (X,d)，我们可以定义拓扑如下。对 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$，令

$$B(x,\varepsilon)=\left\{y\in X\,\middle|\,d(x,y)<\varepsilon\right\}$$

$B(x,\varepsilon)$ 称为以 x 为心 ε 为半径的**球形邻域**。令

$$\tau_d=\left\{\bigcup_{(x,\varepsilon)\in\Lambda}B(x,\varepsilon)\,\middle|\,\Lambda\subset X\times\mathbb{R}_+\right\}$$

练习 24.9. *证明 τ_d 是 X 上的拓扑。*

证明. 易见 $\emptyset\in\tau_d$ 和 $X\in\tau_d$。任意多个 τ_d 中集合的并也是 τ_d 中集合。只要证明若 $U=\bigcup_{(x,\varepsilon)\in\Lambda}B(x,\varepsilon)\in\tau_d$ 和 $V=\bigcup_{(y,\delta)\in\Omega}B(y,\delta)\in\tau_d$，这里 $\Lambda,\Omega\subset X\times\mathbb{R}_+$，则 $U\cap V\in\tau_d$。我们有

$$U\cap V=\bigcup_{(x,\varepsilon)\in\Lambda,(y,\delta)\in\Omega}B(x,\varepsilon)\cap B(x,\delta)$$

因为 τ_d 满足任意并公理，只需证明 $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\delta)\in\tau_d$。对 $\forall\, z\in B(x,\varepsilon)\cap B(y,\delta)$，令 $\xi_z=\min\{\varepsilon-d(x,z),\delta-d(y,z)\}$，则 $\xi_z>0$，从而 $z\in B(z,\xi)\subset B(x,\varepsilon)\cap B(y,\delta)$。故有

$$B(x,\varepsilon)\cap B(y,\delta)=\bigcup_{z\in B(x,\varepsilon)\cap B(y,\delta)}B(z,\xi_z)\in\tau_d$$

于是 τ_d 是 X 上的拓扑。 □

(X,τ_d) 称为 X 上由 d 诱导的**度量拓扑** (metric topology)。

例 24.10. 对任何集合 X，定义如下度量

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

则 (X,d) 也是一个度量空间。

练习 24.11. *(X,d) 是 X 上的离散拓扑。*

子空间拓扑或诱导拓扑

设 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间，$Y\subset X$ 是 X 的子集合，定义

$$\mathcal{T}_Y=\{O\cap Y\mid O\in\mathcal{T}\}$$

$\mathcal{T}_Y$ 给出了 Y 上的拓扑，称为**子空间拓扑** (subspace topology) 或**诱导拓扑** (induced topology)。子空间拓扑中，Y 中的开集由 X 中的开集与 Y 相交得到。

例如，欧氏空间的子集作为子集有诱导拓扑。当我们说拓扑空间 X 的子空间 Y 时，我们指 Y 是 X 的子集，赋予诱导拓扑。

24.2 邻域和内点

设 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间，X 的子集 N 称为点 $x\in X$ 的**邻域** (neighborhood)，如果存在开集 O 使得 $x\in O\subset N$；我们也称 x 是 N 的**内点** (interior point)。集合 A 的所有内点组成的子集称为 A 的**内部** (interior)，记为 $\overset{o}{A}$ 或者 A^o。

内部有如下简单性质

$$(A^o)^o=A^o,\qquad A\subset B\Rightarrow \overset{o}{A}\subset \overset{o}{B},\qquad (A\cap B)^o=\overset{o}{A}\cap\overset{o}{B},\qquad (A\cup B)^o\supset \overset{o}{A}\cup\overset{o}{B}$$

命题 24.12. *子集 A 是开集当且仅当 $A=A^o$，即每点都是内点。A^o 是包含在 A 中的最大开子集。*

证明. 若 A 是开集，则 $\forall x\in A$ 均为 A 的内点，故 $A\subset A^o$ 进而 $A=A^o$。若 $A=A^o$，则 $\forall x\in A$，存在开集 O_x 使得 $x\in O_x\subset A$，从而 $A=\bigcup_{x\in A}O_x$ 是开集。

令

$$\mathcal{V}=\{V\in\tau\,|\,V\subset A\},\qquad U=\bigcup_{V\in\mathcal{V}}V$$

则 U 是包含在 A 中的最大开集。

□

24.3 闭集和极限点

拓扑空间 X 的一个子集 A 称为**闭集** (closed subset)，如果它的补集是开集。特别地，全空间 X 和空集 $\emptyset$ 都是闭集，注意它们也都是开集。

例 24.13. $\{x^2+y^2\le 1\}$ 和上班平面 $\{(x,y),y\ge 0\}$ 都是 $\mathbb{E}^2$ 中的闭集。

练习 24.14. *证明拓扑空间的闭子集满足*

1. *X 和 $\emptyset$ 均为闭集；*
2. *闭子集的任意交是闭集；*
3. *闭子集的有限并是闭集。*

定义 24.15. 设 A 是空间 X 的子集，点 $p\in X$ 称为 A 的**极限点** (limit point) 或**聚点** (accumulation point)，如果 x 的每个邻域都包含至少一个 A 中不同于 x 的点。A 的所有极限点的集合成为 A 的**导集** (derived set)，记为 A'。

集合 A 与它的所有极限点集合的并成为 A 的**闭包** (closure)，记为 $\overline{A}$。点 $x\in\overline{A}$ 当且仅当 A 与 x 的每个邻域相交非空。

例 24.16. 1. 考虑 $\mathbb{E}^1$ 的子集 $A=(0,1)$，则 A 中的每个点都是 A 的极限点，此外，0 和 1 也是 A 的极限点。

2. 对 $\mathbb{E}^1$ 的有理数集合 $\mathbb{Q}$，每个实数都是其极限点。

3. 考虑欧氏空间中 $\mathbb{E}^n$ 中的整数点集 $\mathbb{Z}^n$。对任何整数点 $x \in \mathbb{E}^n$，以 x 为球心半径为 1 的开球不包含除 x 之外的整点，所以 x 不是 $\mathbb{Z}^n$ 的极限点；如果 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 不是整数点，例如 $x_1 \notin \mathbb{Z}$，则以 x 为球心，以 $\min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\}$ 为半径的开球不包含任何整数点。所以 $\mathbb{Z}^n$ 没有极限点。

4. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑 $\mathcal{T}_f$。设 A 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 的一个无穷子集，则任意实数 x 都是 A 的极限点。反过来，一个有限子集 A 在 $\mathcal{T}_f$ 下没有极限点。类似地，对于 $\mathbb{R}$ 上的余可数拓扑 $\mathcal{T}_c$，可数子集没有极限点，而任何实数都是不可数子集的极限点。

命题 24.17. *集合是闭集当且仅当它包含所有的极限点。*

证明. 设 A 是 X 的闭子集。对任何 $x_0 \notin A$，则 $X \setminus A$ 是 x_0 的与 A 不交的开邻域，所以 x_0 不是 A 的极限点。于是 A 所有的极限点都包含在 A 中。

反过来，设 A 包含它所有的极限点。任何点 $x \in X \setminus A$ 不是 A 的极限点，所以存在开邻域 U_x 与 A 不交，我们有 $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$。这样，作为开集的并集，$X \setminus A$ 是开集。于是 A 是闭集。 □

定义 24.18. 设 $\{x_n\}$ 是拓扑空间 X 中的点列，如果存在点 $x_0 \in X$ 使得 x_0 的每个邻域包含了有限多个点之外的 $\{x_n\}$ 中的所有点，则称*序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0*，记为 $x_n \to x_0$，$n \to \infty$。

闭包有如下简单性质

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

练习 24.19. *举出 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ 的例子。*

命题 24.20. *X 的子集 A 是闭集当且仅当 $A = \overline{A}$。$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。*

证明. 若 A 是闭集，则 A^c 是开集，对 $\forall x \in A^c$，A^c 是 x 的开邻域，不包含 A 中任何点，所以 $x \notin A'$。这说明 $A' \subset A$，从而 $\overline{A} = A \cup A' = A$。

反之，若 $A = \overline{A}$，则对 $\forall x \in A^c$ 有 $x \notin A'$。故存在 x 的邻域 U_x，使得 U_x 中不包含 A 中的点，故 x 是 A^c 的内点。这说明 $A^c = (A^c)^o$，由命题24.12，A^c 是开集，故 A 是闭集。

令

$$\mathcal{E} = \left\{ E \subset X \,\middle|\, A \subset E \text{且 } E \text{ 是闭集} \right\}, \qquad K = \bigcap_{E \subset \mathcal{E}} E$$

则 K 是包含 A 的最小闭集，且有 $A \subset K$，进而 $\overline{A} \subset \overline{K} = K$。另一方面，$\overline{A} = \overline{\overline{A}}$，故是闭集。由 $\mathcal{E}$ 的定义，有 $\overline{A} \in \mathcal{E}$，从而有 $K \subset \overline{A}$。所以 $\overline{A} = K$ 是包含 A 的最小闭集。 □

在闭包和内部之间有如下的密切关系。

命题 24.21. *设 A 是拓扑空间 X 的子集，B 为其补集，则 $\overline{A}$ 和 $\overset{o}{B}$ 互为补集。*

证明. 点 $x \in \overline{A}$ 当且仅当 x 的每个邻域都与 A 相交非空。因此

$$\begin{aligned} x \in \left(\overline{A}\right)^c &\iff \text{存在 } x \text{ 的邻域与 } A \text{ 不交} \\ &\iff \text{存在 } x \text{ 的包含在 } B \text{ 中邻域} \\ &\iff x \text{ 是 } B \text{ 的内点} \end{aligned}$$

所以 $\overline{A}$ 与 $\overset{o}{B}$ 互为补集。 □

X 的子集 A 如果满足 $\overline{A} = X$，则称 A 在 X 中**稠密** (dense)。集合稠密当且仅当它和每个开集都相交不空。有可数稠密子集的空间称为**可分的** (separable)。

24.4 拓扑基

设 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间，如果一族开集 $\mathcal{B}$ 满足任何 X 中开集都是 $\mathcal{B}$ 中一些开集的并，则 $\mathcal{B}$ 称为拓扑 $\mathcal{T}$ 的**拓扑基** (base)，我们也称 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{B}$ **生成的拓扑**。等价地，我们可以说对任意点 $x \in X$ 及其邻域 N，存在开集 $O \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in O \subset N$。

例 24.22. 对 $\mathbb{E}^1$，所有开区间构成拓扑基。所有端点为有理数的开区间给出一个小一些的拓扑基。两个拓扑基如果给出同样的拓扑，就称它们为**等价的** (equivalent)。两个拓扑基 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 等价当且仅当 $\mathcal{B}_1$ 的每个非空开集包含 $\mathcal{B}_2$ 的一个非空开集，并且反之亦然。

第二个拓扑基事实上是可数的。具有可数拓扑基的拓扑空间称为**第二可数的** (second-countable)。所以 $\mathbb{E}^1$ 是第二可数的。

对于一般的欧氏空间 $\mathbb{E}^n$，以有理点为球心的有理半径球和有理顶点的立方体都构成 $\mathbb{E}^n$ 的可数的拓扑基，所以欧氏空间是第二可数的。

练习 24.23. *$\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑 $\mathcal{T}_f$ 是否存在可数拓扑基？构造一个或者证明不存在。$\mathbb{R}$ 上的余可数拓扑 $\mathcal{T}_c$ 呢？*

定理 24.24. *设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一族非空子集。如果 $\mathcal{B}$ 满足如下两个条件*

1. *对任何 $U, V \in \mathcal{B}$ 和点 $x \in U \cap V$，存在 $W \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in W \subset U \cap V$，*
2. *X 为 $\mathcal{B}$ 中所有集合之并，*

则 $\mathcal{B}$ 给出 X 上的拓扑，并且 $\mathcal{B}$ 为其拓扑基。

证明. 令

$$\mathcal{T} = \left\{ U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} V \;\middle|\; \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \right\}$$

我们来证明 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$。令 $\mathcal{B}' = \emptyset$，我们得到 $\emptyset = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} \in \mathcal{T}$。令 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$，由条件2，我们有 $X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V \in \mathcal{T}$。
2. 设 $U_\lambda \in \mathcal{T}, \lambda \in \Omega$。设 $U_\lambda = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_\lambda} V$，其中 $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}$。则有

$$\bigcup_{\lambda \in \Omega} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Omega} \left(\bigcup_{V \in \mathcal{B}_\lambda} V \right) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_\lambda, \lambda \in \Omega} V = \bigcup_{V \in \bigcup_{\lambda \in \Omega} \mathcal{B}_\lambda} V \in \mathcal{T}$$

3. 设 $U_1 = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_1'} V$，$U_2 = \bigcup_{V \in \mathcal{B}_2'} V$，这里 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$。我们有

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{V_1 \in \mathcal{B}_1, V_2 \in \mathcal{B}_2} V_1 \cap V_2$$

只要证明对 $\forall V_1 \in \mathcal{B}_1$ 和 $\forall V_2 \in \mathcal{B}_2$，有 $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$。由条件 1，对 $\forall x \in V_1 \cap V_2$，存在 $W_x \in \mathcal{B}$，使得 $X \in W_x \subset V_1 \cap V_2$。于是有

$$V_1 \cap V_2 \subset \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W_x \subset V_1 \cap V_2, \qquad V_1 \cap V_2 = \bigcup_{x \in V_1 \cap V_2} W_x \in \mathcal{T}$$

所以 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑，并且由 $\mathcal{T}$ 的构造，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的拓扑基。 □

事实上，这里的条件 1 是可以去掉的，给定一族 X 的非空子集 $\mathcal{C}$，如果 $\mathcal{C}$ 中所有集合之并为 X，则构造 $\mathcal{B}$ 如下

$$\mathcal{B}=\left\{U_1\cap U_2\cdots\cap U_n\,\middle|\,u\in\mathbb{N},U_1,\cdots,U_n\in\mathcal{C}\right\}$$

则可以验证 $\mathcal{B}$ 满足定理24.24中的条件，从而 $\mathcal{B}$ 是 X 上的拓扑基。

25 连续映射

定义 25.1. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f : X \to Y$ 是他们之间的映射，我们称 f *在点 x 处连续* (continuous at x)，如果对 $f(x)$ 在 Y 中的任何邻域 V，$f^{-1}(V)$ 是 x 在 X 中的邻域。如果 f 在 X 中的每一点 $x \in X$ 处连续，则称 f 为*连续映射* (continuous map)。$f : X \to Y$ 称为*同胚* (homeomorphism)，如果 f 连续的双射，并且 $f^{-1} : Y \to X$ 连续。

如果 $f : X \to Y$ 是同胚，则 $f^{-1} : Y \to X$ 也是同胚。两个拓扑空间 X 和 Y 称为*同胚的* (homeomorphic)，如果存在同胚映射 $f : X \to Y$。

例 25.2. 有如下的连续函数

1. 从空间 X 到 X 的把每个点 x 映为自身的映射称为*恒同映射* (identity map)，记为 $\mathbb{1}_X$。$\mathbb{1}_X$ 在一个子空间 A 上的限制称为*含入映射* (inclusion map)。恒同映射和含入映射都是连续的。
2. 常值映射总是连续的。
3. 如果 X 赋予离散拓扑，则任意映射 $f : X \to Y$ 都是连续的。
4. 如果 Y 赋予平凡拓扑，则任何映射 $f : X \to Y$ 都是连续的。

命题 25.3. *映射 $f : X \to Y$ 连续当且仅当 Y 中每个开集的逆像是开集。*

证明. 设 $f : X \to Y$ 连续。给定 Y 中的开集 V，对 $f^{-1}(V)$ 中的任何点 x，V 是 $f(x)$ 的邻域，由连续性定义，$f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域，即 x 是 $f^{-1}(V)$ 的内点。由 x 的任意性，$f^{-1}(V)$ 中每点都是内点，由命题24.6，$f^{-1}(V)$ 是 X 中开集。

反之，设 Y 中每个开集 V 的逆像是开集。给定 $x \in X$，设 V 是 $f(x)$ 的邻域，则存在开集 U 使得 $x \in U \subset V$。由假设，$f^{-1}(U)$ 是 X 中开集，且有 $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$，于是 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域。由连续性定义，f 在 x 处连续。由 x 的任意性，f 是连续映射。 □

此等价性给出了更加方便的定义：

定义 25.4. 映射 $f : X \to Y$ 是*连续映射*，如果每个开集的逆像是开集。

命题 25.5. *设 $f : X \to Y$ 是映射，X 的子集 $A \subset X$ 赋予诱导拓扑。记 $f_A = f|_A : A \to Y$ 为 f 在 A 上的限制。我们有*

1. *如果 f 在 $x \in A$ 处连续，则 f_A 也在 x 处连续。*
2. *如果 A 是 x 在 X 中的邻域，并且 f_A 在 x 处连续，则 f 也在 x 出连续。*

证明. 任给 $f(x) = f_A(x)$ 的邻域 V，因 f 连续，f^{-1} 是 x 在 X 中的邻域，从而存在开集 U，使得 $x \in U \subset f^{-1}(V)$。而

$$f_Z^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V) = \subset A \cap U \in x$$

由子空间拓扑定义 $A \cap U$ 是 A 中开集，从而 $F_A^{-1}(V)$ 是 x 在 A 中的邻域，这说明 f_A 在 x 处连续。

设 V 是 $f(x)$ 的邻域，因 f_A 连续，存在 x 在 A 中开集 U_A，使得

$$x \in U_A \subset f_A^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V)$$

由子空间拓扑定义，存在 X 中开集 U，使得 $U_A = U \cap A$。因 A 是 x 的邻域，存在 X 中开集 W，使得 $x \in W \subset A$。于是有 $x \in U_A \cap W \subset f^{-1}(V)$。但 $U_A \cap W = (U \cap A) \cap W = U \cap (A \cap W) = U \cap W$ 是 X 中开集，故 $f^{-1}(V)$ 是 x 在 X 中的邻域。由 V 的任意性，f 在 x 处连续。 □

命题 25.6. 连续映射的复合映射连续。

证明. 设 $X \xrightarrow{f} Y$ 和 $Y \xrightarrow{g} Z$ 是连续函数。对 Z 中开集 V，我们有

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

由 g 连续，$g^{-1}(V)$ 是 Y 中开集，再由 f 连续，$f^{-1}(g^{-1}(V))$ 是 X 中开集。故对任何开集 $V \subset Z$，$(g \circ f)^{-1}(V)$ 是 X 中开集，$g \circ f$ 连续。 □

这给出命题25.5的另一个证明。

命题 25.7. 下列命题等价

(a) $f : X \to Y$ 连续；

(b) 如果 β 是 Y 上拓扑的拓扑基，则 β 中开集的逆像是 X 中的开集；

(c) 对 X 中任意子集 $A \subset X$，有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$；

(d) 对 Y 中任意子集 $B \subset Y$，有 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$；

(e) Y 中任意闭子集的逆像是 X 中的闭集。

证明. (a) $\Longrightarrow$ (b) 这是显然的。

(b) $\Longrightarrow$ (c) 设 $A \subset X$，则有 $f(A) \subset \overline{f(A)}$。对 $\forall x \in \overline{A} \setminus A$，须证 $f(x)$ 是 $f(A)$ 的极限点。若 N 是 $f(x)$ 在 Y 中的邻域，则存在 Y 中开集 $V \in \beta$ 使得 $f(x) \in V \subset N$。由 2，$f^{-1}(V)$ 是 X 中开集，因 $x \in A'$，故存在 $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$。于是 V 从而 N 中包含 $f(A)$ 中的点，这说明 $f(x) \in \overline{f(A)}$。由 x 的任意性，就有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$。

(c) $\Longrightarrow$ (d) 设 $B \subset Y$，则由 (c)，对 $f^{-1}(B)$，有

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subset \overline{B}$$

从而有

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$$

(d) $\Longrightarrow$ (e) 若 B 是 Y 中闭集，则有 $B = \overline{B}$。由 (d)，则有

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$$

再由命题24.20，就有 $f^{-1}(B)$ 是 X 中闭集。

(e) $\Longrightarrow$ (a)

□

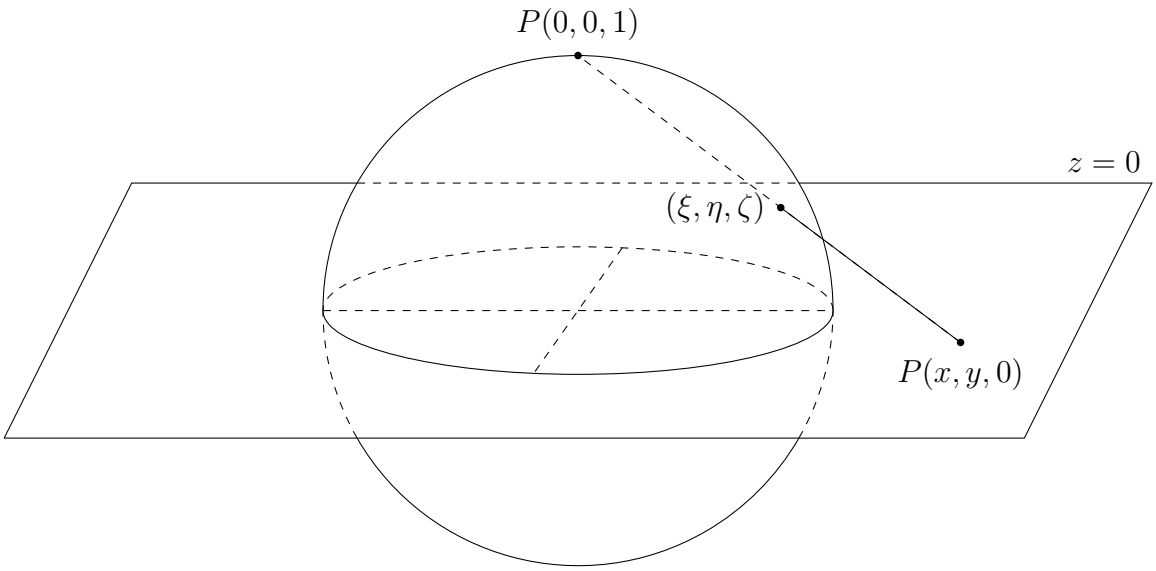


图 61: 球极投影

例 25.8 (球极投影 (Stereographic projection))**.** 取 $\mathbb{E}^3$ 中单位球面 S^2 的北极点 $p=(0,0,1)$。如图61所示，对点 $q=(x,y,z)\in S^2\setminus\{p\}$，经过点 p 和 q 的直线余平面 $\mathbb{E}^2=\{(x,y,z)\mid z=0\}\subset\mathbb{E}^3$ 恰好相交于一点，记交点为 $f(q)$。于是我们有映射 $f:S^2\setminus\{p\}\to\mathbb{E}^2$。映射 f 的公式为

$$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right).$$

注意到对 $q\in S^2\setminus\{p\}$，我们有 $z<1$。我们来证明 f 是同胚。首先，f 是既单又满的：如下定义的

$$g(x,y)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$$

映射 $g:\mathbb{E}^2\to S^2\setminus\{p\}$ 给出了 f 的逆映射。对任何开集 $U\subset\mathbb{E}^2$，$\mathbb{E}^3$ 的子集

$$V=\left\{(tx,ty,1-t)\,\middle|\,(x,y)\in U,t>0\right\}$$

在 $\mathbb{E}^3$ 中开，事实上 V 是 U 上以 p 为锥点的锥。我们有 $f^{-1}(U)=g(U)=V\cap(S^2\setminus\{p\})$(令 $t=2/(x^2+y^2+1)$)，从而在 $S^2\setminus\{p\}$ 中开，所以 f 连续。类似可得 g 连续。所以 f 是同胚。

例 25.9. 映射 $f:[0,1)\to S^1, f(x)=e^{2\pi ix}$ 连续，既单又满，但 f 不是同胚。

练习 25.10. *在取 $\mathbb{E}^1$ 的诱导拓扑下，证明*

1. *$[0,1]$ 与 $(0,1)$ 不同胚。*
2. *$[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 与 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 同胚。*

例 25.11. 设 $f:X\to Y$ 是一一连续映射。$f(X)$ 是 Y 的子集，赋予子空间拓扑。如果 $f:X\to f(X)$ 是同胚，则称 f 是*嵌入* (embedding)。含入映射是嵌入。

但是，并不是所有的一一映射都是嵌入。例如，我们可以一一连续地把直线映为 8 字形。

$$\phi:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^2,\qquad \phi(t)=\left(\frac{\sqrt{2}\cos(t)}{\sin^2(t)+1},\frac{\sqrt{2}\cos(t)\sin(t)}{\sin^2(t)+1}\right)$$

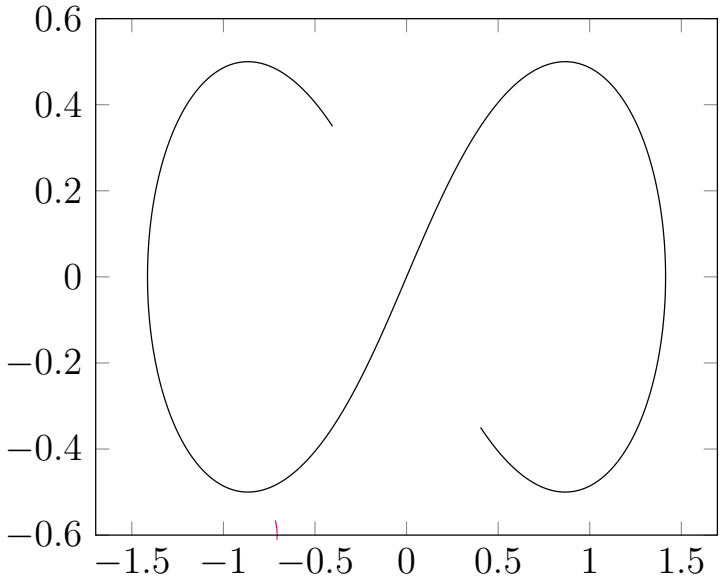


图 62: 从区间到八字形的映射

练习 25.12. 证明 g 不是嵌入。

空间 X 中的一族子集 $\mathcal{C}$ 称为 X 的*覆盖* (cover)，如果满足 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C = X$。如果 $\mathcal{C}$ 中的每个集合都是开集，则称 $\mathcal{C}$ 为 X 的*开覆盖* (open cover)；如果都是闭集，则称*闭覆盖* (closed cover)。如果 $\mathcal{C}$ 只有有限多个子集，则称为*有限覆盖* (finite cover)。

定理 25.13 (粘接引理 (Glueing Lemma))**.** 设 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是空间 X 的有限的闭覆盖，如果 $f : X \to Y$ 限制在每个 A_i 连续，则 f 是连续映射。

证明. 只要证明任何 Y 中闭集的原像是 X 中闭集。设 B 是 Y 中闭集。记 f_{A_i} 为 f 在 A_i 上的限制。则有

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(B) \cap A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f_{A_i}^{-1}(B).$$

因 f_{A_i} 连续，故 $f_{A_i}^{-1}(B)$ 是 A_i 中闭集。由诱导拓扑的定义，存在 X 中闭集 $U_i \in X$ 使得 $f_{A_i}^{-1}(B) = A_i \cap A_i$。因 A_i 和 U_i 都是 X 中闭集，故 $f_{A_i}^{-1}(B)$ 亦是 X 中闭集。f^{-1} 是有限多个 X 中闭集的并集，从而是 X 中闭集。因此 f 是连续映射。

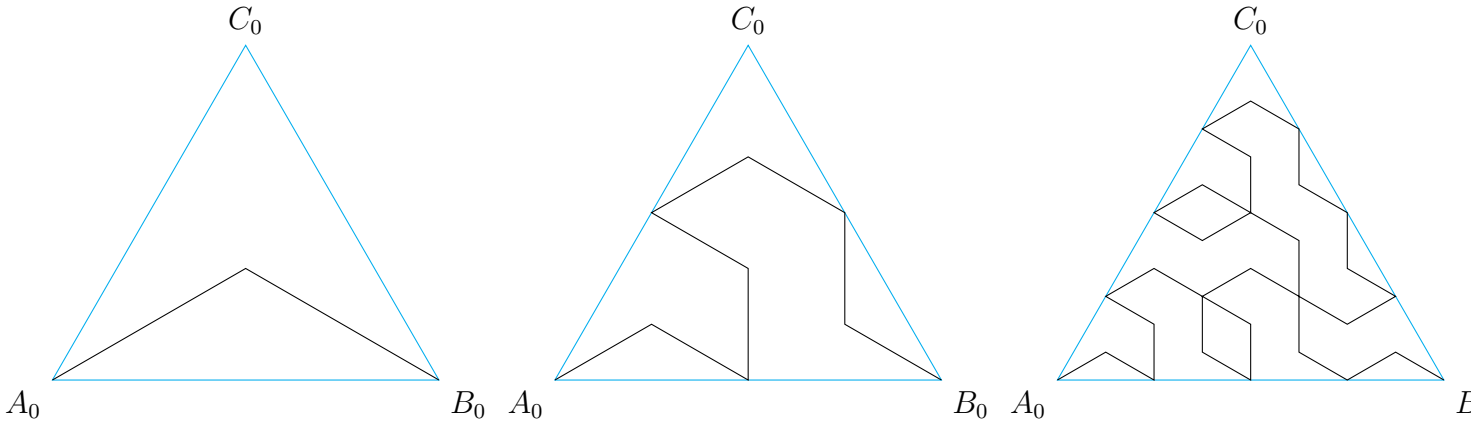
□

这给出了构造连续函数的一种方法。

练习 25.14. 如果定理中的闭覆盖改为开覆盖，结论是否成立?

例 25.15 (充满空间的曲线)**.** 设 $\triangle_0(A_0, B_0, C_0)$ 是边长为 1 的等边三角形，记 D_0 为三角形的中心，记 f_0 为映射

$$f_0 : [0,1] \to \triangle_0, \qquad f_0(x) = \begin{cases} (1-2t)A_0 + (2t)D_0, & \text{当 } t \leqslant \frac{1}{2}, \\ (2-2t)D_0 + (2t-1)B_0, & \text{当 } t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$



(a) f_0 (b) f_1 (c) f_2

(d) f_3 (e) f_4 (f) f_5

图 63: Peano 曲线

f_0 的像集如图63所示。将 $\triangle_0$ 均分为四个小三角形，重复这个过程，我们得到一系列的函数

$$f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots$$

定义

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

如果 x 映为某个三角形的顶点，就不再改变；如果 x 不是顶点，但 $f_n(x)$ 在某个小三角形 $\triangle_{n,\alpha}$ 中，那么它的像一直落在 $\triangle_{n,\alpha}$ 中，所以有

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [0,1].$$

于是函数序列 $\{f_n\}$ 一致收敛，由于每个函数 f_n 连续，所以极限函数 $f(x)$ 存在并且连续。

练习 25.16. 证明 f 是满射，但不是同胚。

乘积空间

设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 为两个拓扑空间。X 与 Y 的笛卡尔乘积为

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

有自然的投射

$$p_X : X \times Y \to X, \quad p_X(x, y) = x, \qquad p_Y : X \times Y \to Y, \quad p_Y(x, y) = y.$$

例 25.17. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$，正方形是两个 $[0, 1]$ 的乘积。

我们要定义 $X \times Y$ 上使得投射 p_X 和 p_Y 都连续的最小拓扑 $\mathcal{T}_\times$。假定 p_X 与 p_Y 连续。设 U 与 V 分别是 X 和 Y 中的开集，由连续性质，我们有 $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ 和 $p_Y^{-1}(V) = X \times V$ 是开集。对笛卡尔积，我们有性质

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \tag{25.1}$$

所以 $U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$ 是开集。因此 $\mathcal{T}_\times$ 需要包含所有开集的乘积。令 $\mathcal{B}_\times$ 为所有形如 $U \times V$ 的子集族，这里 U 是 X 中开集，V 是 Y 中开集。但一般而言 $\mathcal{B}_\times$ 不是一个拓扑，因为 $U_1 \times V_1 \cup U_2 \times V_2$ 一般来说不是一个乘积。

由性质25.1和定理24.24，$\mathcal{B}_\times$ 构成一个拓扑基。令 $\mathcal{T}_\times$ 为由 $\mathcal{B}_\times$ 生成的拓扑，也就是说，$\mathcal{T}_\times$ 中的每个集合都是一些 $U_i \times V_i$ 的并，这里 U_i 是 X 中开集，V_i 是 Y 中开集。则 $\mathcal{T}_\times$ 是使得 p_X 与 p_Y 都连续的最小拓扑。

$\mathcal{T}_\times$ 称为 $X \times Y$ 上的**乘积拓扑** (product topology)，拓扑空间 $(X \times Y, \mathcal{T}_\times)$ 称为 $(X, \mathcal{T}_X)$ 与 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 的**乘积空间** (product space)。

我们也可以考虑多个拓扑空间的乘积。我们有

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$$

即拓扑空间的乘积满足结合律。所以我们也记为 $X \times Y \times Z$。

考虑无穷多个拓扑空间 $(X_\lambda, \tau_\lambda), \lambda \in \Lambda$，它们的笛卡尔积定义为

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \left\{ \Lambda \xrightarrow{f} \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \;\middle|\; f(\lambda) \in X_\lambda, \forall\, \lambda \in \Lambda \right\}$$

可以在 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上定义两种拓扑，分别由下面的拓扑基生成

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \,\middle|\, U_\lambda \in \tau_\lambda, \forall\, \lambda \in \Lambda \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \,\middle|\, U_\lambda \in \tau_\lambda, \forall\, \lambda \in \Lambda \text{并且除去有限多个 } \lambda \text{ 外，有} U_\lambda = X_\lambda \right\}$$

通常采用的是第二种拓扑。如 $\mathbb{R}^\infty$ 等。

命题 25.18. *设 X, Y, Z 是拓扑空间，$f : Z \to X \times Y$ 是一个映射。则 f 连续当且仅当两个复合映射 $p_X \circ f : Z \to X$ 和 $p_Y \circ f : Z \to Y$ 都连续。*

证明. 若 f 连续，因为投射 p_X 与 p_Y 都连续，所以复合映射 $p_X \circ f : Z \times X$ 与 $p_Y \circ f : Z \to Y$ 连续。反之，设 $p_X \circ f$ 与 $p_Y \circ f$ 连续。对任何开集 $W \subset X \times Y$，及 $z \in f^{-1}(W)$，由乘积拓扑的定义，存在开集 $U \subset X$ 及开集 $V \subset Y$，使得 $f(z) \in U \times V \subset W$。因 $p_X \circ f$ 与 $p_Y \circ f$ 连续，故 $(p_X \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(U \times Y)$ 开，$(p_Y \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(X \times V)$ 开，所以

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) = f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V)$$

是开集。而 $z \in f^{-1}(U \times V) \subset f^{-1}(W)$，所以 z 是 $f^{-1}(W)$ 的内点。由 z 的任意性及命题24.12，$f^{-1}(W)$ 是开集，所以 f 连续。 □

练习 25.19. *设 $A \subset X$，$B \subset Y$，证明 $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$。*

26 分离性与可数性

26.1 分离公理

我们关心拓扑空间中的两个点是否能够被邻域所区分开来。

定义 26.1. 设 X 是一个拓扑空间，我们称

1. X 为T_1 空间，如果对 X 中任意两个不同的点 x 与 y，存在 x 的不包含 y 的邻域和 y 的不包含 x 的邻域。
2. X 为T_2 空间或 *Hausdorff* 空间，如果 X 中任何两个不同的点有不相交的邻域。
3. X 为T_3 空间或正则空间 (regular)，如果任何点 x 和不包含 x 的闭集有不相交的开邻域。
4. X 为T_4 空间或正规空间 (normal)，如果任何两个不相交的闭集有不相交的邻域。

在定义中，集合 A 的一个邻域是指内部包含 A 的一个集合。这四类空间的定义在下图中表明出来

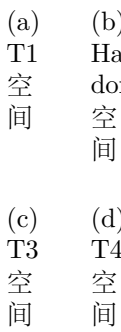


图 64: 分离公理示意图

一个 Hausdorff 空间必定是 T_1 空间，但反之不对。例如实数集合 $\mathbb{R}$ 在余有限拓扑 $\mathcal{T}_f$ 下是 T_1 空间，但并不是 Hausdorff 的。事实上，$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 的任何两个开集都相交。

命题 26.2. 一个拓扑空间是 T_1 的当且仅当任何有限子集是闭集。

证明. 设 X 是 T_1 空间，$A = \{x\}$ 是一个单点子集。对任何点 $y \in X \setminus \{x\}$，由 T_1 性质，存在开集 U_y 使得 $y \in U_y \subset X \setminus \{x\}$。于是

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X, y \neq x} U_y$$

是开集，从而 $\{x\}$ 是闭集。所以 X 的任何有限子集也是闭集。

现在假定 X 的任何有限子集都是闭集。对于两个不同的点 x 和 y，$\{x\}$ 和 $\{y\}$ 都是闭集，所以 $X \setminus \{x\}$ 和 $X \setminus \{y\}$ 给出 T_1 公理所需要的开集。 □

推论 26.3. 设 X 是 T_1 空间，$A \subset X$ 是 X 的子集。如果 x 是 A 的一个聚点，则对 x 的任何邻域 U，$A \cap U$ 是无穷集合。

证明. 用反证法。假定存在 x 的邻域 U 使得 $U \cap A$ 是有限集合。我们可以选择 U 是开集。由命题26.2，$E := (U \cap A) \setminus \{x\}$ 是闭集。于是 $V = U \setminus E = (U \setminus (U \cap A)) \cup \{x\}$ 是 x 的开邻域，但 V 并不包含 A 中除 x 以外的任何点。这与 x 是 A 的聚点矛盾。 □

上面两条性质对 Hausdorff 空间也成立。事实上，Hausdorff 空间的定义非常重要，因为它排除了很多奇怪的拓扑空间。在流形的定义里，我们要求 Hausdorff 性质。下面说明 Hausdorff 空间里，序列极限具有较好的性质。

命题 26.4. *在 Hausdorff 空间里，一个序列不会收敛到两个点。*

证明. 设 $\{x_n\}$ 是 Hausdorff 空间 X 中的序列，收敛到 x_0。对任何点 $x \neq x_0$，由 Hausdorff 性质，存在不相交的开集 U 和 V，使得 $x_0 \in U$ 及 $x \in V$。由序列收敛的定义，$\{x_n\} \setminus U$ 是有限集。于是 $V \cap \{x_n\}$ 是有限集。推论26.3说明 x 不可能是 $\{x_n\}$ 的聚点。命题得证。 □

例 26.5. 我们给出非 Hausdorff 的 “流形” 的例子。令

$$R = \mathbb{R}^1_{\neq 0} \cup \{z_1, z_2\}$$

定义映射 $p_1, p_2 : \mathbb{E}^1 \to R$ 为

$$p_i(x) = \begin{cases} x & 若 x \neq 0, \\ z_i & 若 x = 0. \end{cases}$$

定义 R 上使得 p_1 和 p_2 都连续的最大拓扑。则 z_1 和 z_2 没有不相交的开邻域。但对 $\forall z \in \mathbb{R}$，存在同胚于 $\mathbb{E}^1$ 的邻域，并且是 T_1 空间。

现在，我们给出正则和正规空间的等价条件。

练习 26.6. *一个空间是正则空间当且仅当是 T_3 空间当且仅当对每个点 x 和它的开邻域 W，存在 x 的开邻域 U，使得 $\overline{U} \subset W$。一个空间是正规空间当且仅当对任何闭集 A 和它的开邻域 W，存在 A 的开邻域 U 使得 $\overline{U} \subset W$。*

对一个 T_1 空间 X，正规空间都是正则的，而正则空间都是 Hausdorff 的。但不满足 T_1 公理的条件下，这是不对的。考虑 $\mathbb{R}$ 上的如下拓扑

$$\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid -\infty \leq a \leq +\infty\}$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 是正规的，因为任何两个非空闭集都相交；但 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 不是 T_1 空间，也不是 T_3 空间或者 Hausdorff 空间。

命题 26.7. *乘积空间 $X \times Y$ 是 Hausdorff 的当且仅当 X 与 Y 均是 Hausdorff 的。*

证明. 首先假定 $X \times Y$ 是 Hausdorff 空间。设 x_1 与 x_2 是 X 中两个不同的点。任取 $y \in Y$，则由 Hausdorff 性质，存在 $X \times Y$ 中不相交的开集 W_1 与 W_2 使得 $(x_i, y) \in W_i (i = 1, 2)$。于是存在乘积拓扑基中的开集 $U_1 \times V_1$ 与 $U_2 \times V_2$ 使得 $(x_i, y) \in U_i \times V_i$。因为 $Y \in V_i$，所以 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。所以 X 是 Hausdorff 空间。同理可证 Y 是 Hausdorff 空间。

现设 X 与 Y 均为 Hausdorff 空间。$X \times Y$ 中两个不同的点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)，必然有 $x_1 \neq x_2$ 或者 $y_1 \neq y_2$。不妨设 $x_1 \neq x_2$，因为 X 是 Hausdorff 空间，所以存在 x_1 与 x_2 的不相交的开邻域 U_1 与 U_2，则 $U_1 \times Y$ 与 $U_2 \times Y$ 是 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的不相交的开邻域。 □

26.2 可数性公理

拓扑空间 X 称为**第一可数的** (first-countable)，如果每个点都有可数的邻域基，即对任意 $x \in X$，存在可数多个 x 的邻域 U_i（$i \in \mathbb{N}$），使得对任意 x 的邻域 V，存在某个 U_i 使得 $U_i \subset V$。

例 26.8. 对于欧氏空间 $\mathbb{E}^n$，点 x 的正有理数为半径的球形邻域构成可数的邻域基。所以欧氏空间都是第一可数的。

例 26.9. 取实数 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑 τ_f。对 0 的任意可数多个邻域 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$，每个 U_i^c 至多包含有限多个无理数，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i^c$ 至多包含可数多个无理数。因为无理数不可数，所以 $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ 中包含不可数多个无理数。任取 $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ 中的无理数 a，$V = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ 是 0 的邻域，但任何 U_i 都不包含在 V 中，因为 $a \in U_i \setminus V$。所以 $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 不是第一可数的。

拓扑空间称为**第二可数的** (second-countable)，如果它的拓扑有一个可数的拓扑基。拓扑空间称为**可分的** (separable)，如果它有可数的稠密子集。第二可数的拓扑空间必定是可分的，因为我们可以从它的可数基的每个开集中取一个点。

例 26.10. 对欧氏空间 $\mathbb{E}^n$，坐标为有理数的点是可数的，这些点的以正有理数为半径的开球构成 $\mathbb{E}^n$ 的可数的拓扑基。所以欧氏空间是第二可数的。

命题 26.11. *第二可数的拓扑空间都是第一可数的，且是可分的。*

证明. 设 X 是第二可数的拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是可数的拓扑基。则对任意 $x \in X$，令 $\mathcal{B}'$ 为

$$\mathcal{B}' = \{U \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$$

则 $\mathcal{B}'$ 是 x 的至多可数的邻域的集合。对任意 x 的邻域 V，由拓扑基性质，存在 $U \in \mathcal{B}$，使得 $x \in U \subset V$。由 $\mathcal{B}'$ 的定义，有 $U \in \mathcal{B}'$。所以 X 第一可数。 □

命题26.11的逆命题并不成立。

如下的定理26.12告诉我们什么时候正则的空间是正规的。

定理 26.12 (Lindelöf 定理)**.** *第二可数的正则空间是正规的。*

证明. 设 X 是第二可数的 T_3 空间，E 和 E' 是 X 中不相交的闭集。定理证明可由下图表明

取 X 的可数拓扑基 $\mathcal{B}$，令 $\{B_1, B_2, \cdots\}$ 为 $\mathcal{B}$ 中所有闭包与 E' 不相交的开集，$\{B_1', B_2', \cdots\}$ 为 $\mathcal{B}$ 中所有闭包与 E 不交的开集。令 $U_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}_i'$，$V_n = B_n' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}_i$。则 U_n 和 V_n 均为开集，并且对任何 m 与 n，有 $U_n \cap V_m = \emptyset$。令 $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_n$ 及 $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_n$，则

$$U \cap V = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (U_n \cap V_m) = \emptyset.$$

设 $x \in E$。因 X 是 T_3 空间，故存在 x 和 E' 的不相交的开邻域 W_x 和 W_x'。存在拓扑基 $\mathcal{B}$ 中的开集 B 使得 $x \in B \subset W_x$。因 $\overline{B}$ 与 F' 不相交，故对某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $B = B_n$。而 $E \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i'} = \emptyset$，故 $x \in U_n$，从而有

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U, \quad E' \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_n = V$$

所以 U 和 V 是 E 和 E' 不相交的开邻域。因此 X 是正规空间。 □

27 度量空间与度量化

27.1 度量空间的分离性质

集合上可以给出不同的度量。

例 27.1. 设 $\mathcal{C}$ 是闭区间 $[0,1]$ 上所有连续函数的集合，我们定义如下两个距离

$$d_1(f,g)=\max_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|,\qquad d_2(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$$

距离 d_1 和 d_2 都给出了 $\mathcal{C}$ 上的度量。

练习 27.2. 证明 $(\mathcal{C},d_1)$ 是完备空间，但 $(\mathcal{C},d_2)$ 不是完备空间。给出 $(\mathcal{C},d_2)$ 中不收敛的柯西列。

命题 27.3. 一个度量空间是 T_i 空间，$1\le i\le 4$。

证明. 设 E 和 F 是度量空间 X 中的单点集或者闭子集。

对 $x\in X$，令 $d(x,E)=\inf_{y\in E}d(x,y)$。如果 E 是单点集，由度量的正定性知 $d(x,E)=0$ 当且仅当 $x\in E$。若 E 是闭子集且 $x\notin E$，则 E^c 是开子集，从而存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subseteq E^c$。对任意点 $y\in E$，我们有 $d(x,y)>\dfrac{\varepsilon}{2}$ 从而 $d(x,E)\ge\dfrac{\varepsilon}{2}>0$。所以 $d(x,E)=0$ 当且仅当 $x\in E$。

因为 E 与 F 不相交，对任何 $x\in X$ 有 $d(x,E)+d(x,F)>0$。函数

$$g:X\to\mathbb{E}^1,\quad g(x)=\frac{d(x,E)}{d(x,E)+d(x,F)}$$

良定，并在对 $x\in E$ 取值为 0，对 $x\in F$ 取值为 1。对任何 $x\in X\setminus(A\cup B)$，我们有 $0<g(x)<1$。令

$$U=g^{-1}\Big(\big[0,\frac{1}{4}\big)\Big),\quad V=g^{-1}\Big(\big(\frac{3}{4},1\big]\Big).$$

则 U 和 V 是不相交的开集，且 $E\subseteq U$，$F\subseteq V$。故 X 满足 T_2、T_3 和 T_4 公理，从而也满足 T_1 公理。 □

第二可数性质是一个很强的条件，度量空间也不都是第二可数的。取 $\mathbb{R}$ 上的如下度量

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if } x=y,\\ 1 & \text{if } x\neq y.\end{cases}$$

（验证 d 是 $\mathbb{R}$ 上的度量。）d 给出的度量拓扑是 $\mathbb{R}$ 上的离散拓扑，每个单点集都是开集，因为 $\{x\}=B\left(x,\frac{1}{2}\right)$。$(\mathbb{R},d)$ 的任何拓扑基都包含所有 $\{x\}$，从而是不可数的。

第二可数的空间总是可分的。事实上，只要在可数拓扑基的每个开集中去一点，即可得到可数稠密子集。但反过来，可分的空间并不总是第二可数的。记 S 为所有无理数的集合，在 $\mathbb{R}$ 上，定义

$$\mathcal{T}=\big\{U\setminus A\,\big|\,U\text{是}\mathbb{E}^1\text{中开集，}A\subset S\big\}$$

练习 27.4. 验证 $\mathcal{T}$ 给出了 $\mathbb{R}$ 上可分但并不第二可数的拓扑。

命题 27.5. 可分的度量空间是第二可数的。

证明. 设 X 是可分的度量空间，设 A 是 X 的一个可数稠密子集。令

$$\mathcal{B}=\left\{B\big(a,\frac{1}{n}\big)\;\middle|\;a\in A,n\in\mathbb{N}\right\}$$

则 $\mathcal{B}$ 是可数多个 X 的开子集构成的集合。对 X 中的每个开集 U 和点 $x\in U$，由度量拓扑的构造，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subseteq U$。取自然数 N 使得 $\dfrac{1}{N}<\dfrac{\varepsilon}{2}$。因为 A 在 X 中稠密，存在 $a\in A$ 使得 $d(a,x)<\dfrac{1}{N}$。令 $B_x=B\left(a,\dfrac{1}{N}\right)\in\mathcal{B}$，则 $x\in B_x$。对任何点 $y\in B_x$，我们有 $d(y,x)\le d(y,a)+d(a,x)<\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{N}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。于是 $y\in B(x,\varepsilon)\subseteq U$ 且 $B_x\subseteq U$。从而

$$U=\bigcup_{x\in U}B_x$$

U 是 $\mathcal{B}$ 一些开集的并集。故 $\mathcal{B}$ 构成 X 的拓扑基，命题得证。 □

例 27.6. 欧氏空间 $\mathbb{E}^n$ 是可分的，所以（正如我们已知）也是第二可数的。另外一个例子是 Hilbert 空间 E^ω，定义为平方收敛的序列构成的线性空间，赋予如下乘积

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n.$$

这给出了 E^ω 上的度量

$$d(\{x_n\},\{y_n\})=\sqrt{\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2\Big)^{1/2}$$

E^ω 是 $\mathbb{E}^n$ 的推广。E^ω 是第二可数的：我们有如下的可数稠密集

$$A=\left\{\{x_n\}\;\middle|\;x_n\in\mathbb{Q}，且对足够大的\ n\ 有x_n=0\right\}$$

练习 27.7. 证明 A 在 E^ω 中稠密。

27.2 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理

定理 27.8 (Urysohn 引理). 对正规空间 X 中的不相交的非空闭集 A 和 B，存在连续函数 $f:X\to[0,1]$，使得 $f(A)=0$ 及 $f(B)=1$。

度量空间中 *Urysohn* 引理的证明. 设 X 是度量空间，A 和 B 是 X 的不相交的非空闭子集。对 $x\in X$，定义 $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$。我们证明函数 $f=d(\cdot,A):X\to\mathbb{E}^1$ 是连续函数。设 U 是 $d_0=f(x_0)=d(x_0,A)$ 的邻域，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $(d_0-2\varepsilon,d_0+2\varepsilon)\subset U$。对任意 $z\in B(x_0,\varepsilon)=\left\{y\in X\;\middle|\;d(x_0,y)<\varepsilon\right\}$ 及 $x\in A$，我们有

$$d(x_0,x)-\varepsilon<d(x_0,x)-d(z,x_0)\le d(z,x)\le d(x_0,x)+d(z,x_0)<d(x_0,x)+\varepsilon$$

在 A 上取最小值，我们得到 $d_0-\varepsilon\le d(z,A)\le d_0+\varepsilon$，于是 $d(z,A)\in U$。所以 $B(x_0,\varepsilon)\subseteq f^{-1}(U)$，$f^{-1}(U)$ 是 x_0 的邻域。所以 $d(\cdot,A)$ 是连续函数。

因为 A 是闭集，$d(x,A)=0$ 当且仅当 $x\in A$。因为 A 和 B 不相交，对任意 $x\in X$，我们有 $d(x,A)+d(x,B)>0$，所以函数

$$g:X\to\mathbb{E}^1,\quad g(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

良定，并且对 $x\in A$ 取值 0，对 $x\in B$ 取值 1。引理得证。 □

一般拓扑空间中 *Urysohn* 引理的证明. 记 Q_0 为 $[0,1]$ 中有理数的集合，则 Q_0 是可数的，我们可以排序为

$$Q_0=\{r_1=1,r_2=0,\cdots,r_n,\cdots\}.$$

第一步 我们对每个 $r_i\in Q_0$ 构造开集 U_i，使得

1. 如果 $r_n<r_m$，则 $\overline{U_n}\subset U_m$；
2. $A\subset U_n\subset B^c$。

令 $U_1=B^c$。因为 A 和 B 是不相交的非空闭集，它们有不相交的邻域 U_2 和 V。我们有 $\overline{U_2}\subset B^c$。现在假定我们已经构造了 $U_1,\cdots,U_n$。设

$$r_m=\max\{r_l\mid l\le n,r_l<r_{n+1}\},\quad r_k=\min\{r_l\mid l\le n,r_l>r_{n+1}\}$$

我们有 $r_m<r_k$ 及 $\overline{U_m}\subset U_k$。$\overline{U_m}$ 和 $X\setminus U_k$ 是不相交的闭集，从而有不相交的开邻域，记为 U_{n+1} 和 V_{n+1}。我们有

$$\overline{U_m}\subset U_{n+1}\quad 及\quad \overline{U_{n+1}}\subset U_k.$$

由数学归纳法，所有 U_n 得以构造。

第二步 定义函数 $f:X\to\mathbb{E}^1$ 为

$$f(x)=\sup\{0,r_n\in Q_0\mid x\notin U_n\}\quad 或\quad f(x)=\inf\{1,r_n\in Q_0\mid r\in U_n\}$$

容易验证这两个定义相同。现在我们证明 f 连续，这只要证明，对任何开区间 $(a,b)\subset\mathbb{E}^1$ 及 $\forall\, x\in f^{-1}(a,b)$，存在 x 的开邻域 $U_x\subset f^{-1}(a,b)$。根据 $f(x)$ 的取值，分如下三种情形。

1. $0<f(x)<1$。存在 Q_0 中的有理数 r_m 和 r_k 使得

   $$a<r_m<f(x)<r_k<b$$

   对任何 $y\in X\setminus\overline{U_m}$，有 $f(y)\ge r_m$。因为 $(r_m,f(x))$ 中存在有理数，我们有 $x\in X\setminus\overline{U_m}$。我们也有 $x\in U_k$。令 $U=(X\setminus\overline{U_m})\cap U_k$，则 U 是 x 的开邻域，并且 $U\subset f^{-1}(a,b)$。

2. $f(x)=0$。取 $r_k\in Q_0$ 使得 $0<r_k<b$，则 $x\in U_k\subset f^{-1}(a,b)$。

3. $f(x)=1$。取 $r_m\in Q_0$ 使得 $a<r_k<1$，则 $x\in X\setminus\overline{U_m}\subset f^{-1}(a,b)$。

于是 f 连续。 □

定理 27.9 (Tietze 扩张定理)**.** 正规空间的闭子集上的实值连续函数可以扩张到整个空间。

Tietze 扩张定理是 Urysohn 引理的推广。

证明. 设 E 是正规空间 X 的闭子集，$f : E \to \mathbb{E}^1$ 是 E 上的连续函数。

首先假定 $f(E) \subseteq [-1,1]$。令 $A_1 = f^{-1}([-1,-1/3])$,$B_1 = f^{-1}([1/3,1])$。则 A_1 和 B_1 是 E 中不相交的闭子集，从而也是 X 中不相交的闭子集。由 Urysohn 引理，存在 X 上的连续函数 $\varphi_1 : X \to [-1/3,1/3]$,使得 φ_1 在 A_1 上取值为 $-1/3$,在 B_1 上取值为 $1/3$。令 $f_1 = f - \varphi_1 : F \to \mathbb{E}^1$，则我们有 $f_1(E) \subseteq [-2/3,2/3]$。

重复上述过程，我们构造 X 上的连续函数 $\varphi_2 : X \to [-1,1]$ 使得 $\varphi_2(X) \subseteq [-2/9,2/9]$，并且 $f_2 = f_1 - \varphi_2 = f - \varphi_1 - \varphi_2$ 满足 $f_2(E) \subseteq [-4/9,4/9]$。

继续重复上述过程，我们得到一列 X 的连续函数 $\{\varphi_n\}$，满足

(1) $\varphi_n(X) \subseteq \Big[-\dfrac{2^{n-1}}{3^n}, \dfrac{2^{n-1}}{3^n} \Big]$;

(2) 对 $\forall\, x \in E$，有 $|f(x) - \varphi_1(x) - \cdots - \varphi_n(x)| \le \dfrac{2^n}{3^n}$。

由 Weierstrass M-判别法，级数函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在 X 上一致收敛，并且和函数 $\widetilde{f}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 连续。我们有 $\widetilde{f}(X) \subseteq [-1,1]$。由 (2), 对 $x \in E$，有 $\widetilde{f}(x) = f(x)$。所以 $\widetilde{f}$ 是 f 在 X 上的连续扩张。

对 E 上的一般连续函数 $f : E \to \mathbb{E}^1$，令 $g : E \to \mathbb{E}^1$ 为函数 $g(x) = \dfrac{2}{\pi} \arctan(f(x))$。则由 $g(E) \subseteq (-1,1)$，从而由上面推理，我们可以扩张 g 为 X 上的连续函数 $\widetilde{g} : X \to [-1,1]$。令 $F = \big(\widetilde{f'}\big)^{-1}\big(\{-1,1\}\big)$，则 E 和 F 是 X 中不相交的闭子集。由 Urysohn 引理，存在 X 上的连续函数 $h : X \to [0,1]$ 使得 h 在 E 上取值为 1，在 F 上取值为 0。所以对任意 $x \in X$，有 $h(x)\widetilde{g}(x) \in (-1,1)$，并且在 E 上有 $h(x)\widetilde{g}(x) = g(x)$，在 F 上有 $h(x)\widetilde{g}(x) = 0$。因此函数

$$\widetilde{f}(x) := \tan(\frac{\pi}{2} \cdot h(x) \cdot \widetilde{g}(x)), \quad \forall x \in X$$

是 f 在 X 上的连续扩张。 □

满足定理中结论的空间显然是正规空间的，所以 Tietze 定理给出了正规空间的充要条件：**一个拓扑空间是正规的当且仅当任何闭子集上的连续实值函数可以扩张到整个空间。**

一个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 称为**可度量化的** (metrizable)，如果存在 X 上的度量 d，使得 $\mathcal{T}$ 与 d 诱导的度量拓扑相同。

练习 27.10. 证明：实数 $\mathbb{R}$ 上的余可数拓扑 $\mathcal{T}_c$ 不能实现为度量拓扑。

定理 27.11 (Urysohn 可度量化定理)**.** *第二可数的正规的 Hausdorff 空间是可度量化的。*

证明. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是第二可数的正规的 Hausdorff 空间，$\mathcal{B}$ 是一个可数的拓扑基。令

$$\mathcal{P} = \big\{(B,B') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \;\big|\; \overline{B} \subseteq B'\big\}$$

易见 $\mathcal{P}$ 是可数的，我们可以将 $\mathcal{P}$ 中元素排列为 $(B_1,B_1'),(B_2,B_2'),\cdots$.

因为 X 是正规空间，由 Urysohn 引理，存在连续函数 $f_n : X \to [0,1]$ 使得在 $\overline{B_n}$ 上 $f_n(x) = 0$，在 $X \setminus B_n'$ 上 $f_n(x) = 1$。如果 $\mathcal{P}$ 是有限的，对 $n > N = \#\mathcal{P}$，令 $f_n = 0$。对 X 中的点 x 与 y，令

$$d(x,y) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n(x) - f_n(y))^2}{n^2} \Big)^{1/2}$$

我们证明 d 是 X 上的度量。

1. **正定性** 显然我们有 $0 \leq d(x,y) < \infty$。如果 $x \neq y$，因为 X 是 Hausdorff 空间，存在 $B' \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B'$ 但 $y \notin B'$。因为 X 是正规空间，不相交的闭集 $\{x\}$ 和 $X \setminus B'$ 有不相交的邻域 U 和 V。设 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$，则有 $\overline{B} \subseteq B'$ 从而 $(B, B') \in \mathcal{P}$。设 $(B_n, B'_n) = (B, B')$，则 $f_n(x) = 0$ 但 $f_n(y) = 1$。于是我们有 $d(x,y) \geq \sqrt{\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n} > 0$。所以 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。

2. **对称性** d 的对称性是显然的。

3. **三角不等式** d 满足三角不等式可由 Cauchy-Schwarz 不等式给出。

所以 d 给出了 X 上的度量。我们需要证明 d 诱导的度量拓扑 $\mathcal{T}_d$ 和 X 上原来的拓扑 $\mathcal{T}$ 一致，即 T 中开集都是 $\mathcal{T}_d$ 中开集，反之亦然。

设 U 是一个 $\mathcal{T}_d$ 下的开子集。对任何 $x \in U$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) = \left\{y \in X \,\middle|\, d(x,y) < \varepsilon\right\} \subseteq U$。取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$。对 $i = 1, \cdots, N$，$g_i(y) := |f_i(y) - f_i(x)|$ 是从 $(X, \mathcal{T})$ 到 $[0,\infty)$ 的连续函数，所以 $W_i = g_i^{-1}\left(\left[0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\right)\right)$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 中的开集。令 $W_x = W_1 \cap \cdots \cap W_N$。则 W_x 是 $(X, \mathcal{T})$ 中开集，并且对任何 $y \in W_x$，我们有

$$d(x,y) < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2N} \cdot N + \frac{\epsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

于是 $W_x \subseteq U$，x 是 U 在拓扑 $\mathcal{T}$ 下的内点。由 x 的任意性，U 是拓扑 $\mathcal{T}$ 下的开集。

反过来，对 $\mathcal{T}$ 下的开集 U 和点 $x \in U$，存在 $B' \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B' \subseteq U$。$\{x\}$ 和 $X \setminus B'$ 是 X 中不相交的开子集，因为 X 的正规性，它们有不相交的开邻域 N_1 和 N_2。存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq N_1$，我们有 $\overline{B} \subseteq B'$，从而存在 $k_x \in \mathbb{N}$ 使得 $(B, B') = (B_{k_x}, B'_{k_x})$。对任何 $y \in X \setminus B'$，我们有 $f_k(x) = 0$ 及 $f_k(y) = 1$。所以 $d(x,y) \geq \sqrt{1/k_x^2} = 1/k_x$。于是 $B(x, 1/k_x) \subseteq U$，在拓扑 $\mathcal{T}_d$ 之下，x 是 U 的内点。由 x 的任意性，U 是拓扑 $\mathcal{T}_d$ 下的开集。

综上所述，我们有 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$，所以 $(X, \mathcal{T})$ 是可度量化的。 □

一个拓扑空间 X 可度量化当且仅当它可以嵌入到某个度量空间中。事实上，如果 $f : X \to (Y, d_Y)$ 是嵌入，定义 $d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$，则 d_X 是 X 的度量化。定理27.11的证明将 X 映入到无穷维 Hilbert 空间 E^ω 中

$$x \longmapsto \left(f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \cdots, \frac{f_n(x)}{n}, \cdots\right)$$

并说明此映射是一个嵌入。

定理 27.12 (Nagata-Smirnov 度量化定理)**.** *拓扑空间是可度量化的当且仅当它是满足 T_3 公理的 Haussdorff 空间并且具有 σ-局部有限的基。*

定义 27.13. 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一族子集，若对 $\forall x \in X$，存在 x 的邻域 U，使得 $\#\left\{V \in \mathcal{A} \,\middle|\, U \cap V \neq \emptyset\right\} < \infty$，则称 $\mathcal{A}$ 是*局部有限的* (locally finite)；X 的一族子集 $\mathcal{B}$ 称为*可数局部有限的* (countably locally finite) 或*σ-局部有限的* (σ-locally finite)，如果 $\mathcal{B}$ 是可数多个子集族 $\mathcal{B}_n$ 的并，其中每个 $\mathcal{B}_n$ 都是局部有限的。

定理27.12的证明需要用到良序公理。

28 紧致性

28.1 欧氏空间中的紧致子集

定理 28.1 (Heine-Borel 定理)**.** *闭区间 $[0,1]$ 的任何开覆盖都有有限的子覆盖。*

证明一. 设 $\mathcal{U}$ 是 $[0,1]$ 的开覆盖。令

$$F = \left\{ a \in [0,1] \,\middle|\, [0,a] \text{ 可被 } \mathcal{U} \text{ 中有限多个开集覆盖} \right\}$$

因 $0 \in F$，故 F 不空。令 $\alpha = \sup F$。如果 $\alpha = 1$，则定理成立。如果 $\alpha < 1$，因 $\mathcal{U}$ 覆盖 $[0,1]$，故存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $\alpha \in U$。U 开，故存在 $\varepsilon > 0$，使得 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset U$。因 $\alpha = \sup F$，存在 $a \in F \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$。设 $[0,a]$ 被 $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ 覆盖，则 $U_1, \cdots, U_n, U$ 覆盖了 $\left[0, \alpha + \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$，从而 $\alpha + \dfrac{\varepsilon}{2} \in F$。这与 F 的定义和 $\alpha = \sup F$ 矛盾。所以 $\alpha = 1$。定理得证。 □

练习 28.2. *用闭区间套的办法证明 Heine-Borel 定理。*

定义 28.3. 一个拓扑空间称为*紧致的* (compact)，如果它的任意开覆盖都有有限子覆盖。

所以 Heini-Borel 定理可以陈述为：闭区间 $[0,1]$ 是紧致的。

例 28.4. 由定义，有限的拓扑空间，或者拓扑有限（即 τ 是有限集合）的拓扑空间，是紧致的。

例 28.5. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 紧致，但 $\mathbb{E}^1$ 不紧致。

紧致性是空间的拓扑性质，也就是说，如果 X 与 Y 同胚并且 X 紧致，则 Y 也是紧致的。任何闭区间 $[a,b]$ 都同胚于 $[0,1]$，所以 $[a,b]$ 也是紧致的。紧致性不仅在同胚下保持，在连续映射下也是保持的。

命题 28.6. *紧致集的连续像是紧致的。*

证明. 设 $f : X \to Y$ 是连续满射，X 紧致。设 $\mathcal{C}$ 是 Y 的开覆盖，则 $\mathcal{C}' = \left\{ f^{-1}(U) \,\middle|\, U \in \mathcal{C} \right\}$ 是 X 的开覆盖。因 X 紧致，故 $\mathcal{C}'$ 有有限的子覆盖，设 $X = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)$。因 f 是满射，故有 $U_k = f(f^{-1}(U_k))$。所以 $U_1, \cdots, U_n$ 是 Y 的有限覆盖。所以 Y 紧致。 □

空间 X 的子集 A 称为*紧致子集*，如果在子空间拓扑下，A 是紧致的。A 的子集 U 在子空间拓扑中是开集当且仅当存在 X 的开集 V 使得 $U = V \cap A$，所以 X 的子集 A 紧致当且仅当每个覆盖 A 的 X 的开集族有一个有限的子覆盖。

命题 28.7. *紧致空间的闭子集紧致。*

证明. 设 X 是紧致的拓扑空间，E 是 X 的闭子集。设 $\mathcal{C}$ 是 E 的开覆盖。$E^c = X \setminus E$ 是开集，于是 $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{E^c\}$ 是 X 的开覆盖。因 X 紧致，故存在 $\mathcal{C}'$ 的有限子集 $\mathcal{C}_1 = \{U_1, \cdots, U_n\}$ 覆盖 X。如果 $E^c \notin \mathcal{C}_1$，则 $\mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{C}$ 的有限子集，覆盖 X，从而也是 E 的子覆盖；如果 $E^c \in \mathcal{C}_1$，不妨设 $U_1 = E^c$，则我们有 $E \subset E^c \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$，从而 $E \subset U_2 \cup \cdots \cup U_n$。所以 E 紧致。 □

Heine-Borel 定理有下面的推论

推论 28.8. *闭区间上的任意连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{E}^1$ 有界。*

证明. 对 $n \in \mathbb{N}$，令 $U_n = f^{-1}((-n,n))$。因为 f 连续，每个 U_n 都是 $[a,b]$ 中的开集，所以 $\{U_n\}$ 构成 $[a,b]$ 的开覆盖。有 Heine-Borel 定理，我们可以找到有限多个开集，$U_{n_1},\cdots,U_{n_k}$，使得 $[a,b] = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k}$。令 $M = \max\{n_1,\cdots,n_k\}$，则对任意 $x \in [a,b]$ 有 $-M < f(x) < M$。 □

Heine-Borel 定理可以被推广，事实上我们有

推论 28.9. $\mathbb{E}^1$ 的子集紧致当且仅当它是有界闭子集。

证明. 若 A 是 $\mathbb{E}^1$ 的有界闭集，则存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得 $A \subset [-M,M]$。由 Heine-Borel 定理，$[-M,M]$ 紧致，而 A 是 $[-M,M]$ 的闭子集，故由命题28.7，A 紧致。

反过来，设 A 是紧致的。则 $\{(-n,n)\}$ 是 A 的开覆盖，从而有有限子覆盖，此即说明 A 有界。如果 A 不闭，设 $a \in \overline{A} \setminus A$。对自然数 n，令 $U_n = \left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right) \cup \left(a+\frac{1}{n}, +\infty\right)$。开集族 $\{U_n\}$ 构成 A 的开覆盖。因为 A 紧致，存在有限子覆盖 $U_{n_1},\cdots,U_{n_k}$。令 $N = \max\{n_1,\cdots,n_k\}$，则我们有 $A \subset \left(-\infty, a-\frac{1}{N}\right) \cup \left(a+\frac{1}{N}, +\infty\right)$。于是 $\left(a-\frac{1}{N}, a+\frac{1}{N}\right) \cap A = \emptyset$，这与 $a \in \overline{A} \setminus A$ 矛盾。所以 A 是闭集。 □

练习 28.10. 用 *Heine-Borel* 定理证明的细分法给出推论*28.9*的直接证明。

推论 28.11. 紧致空间上的实值连续函数有界并且达到它的上下界。

证明. 设 X 是紧致空间，$f : X \to \mathbb{E}^1$ 是连续函数。则 $f(X)$ 紧致，从而使 $\mathbb{E}^1$ 中的有界闭集，于是 $f(X)$ 有界，并取到上下界。 □

练习 28.12. *Heine-Borel* 定理的证明可以推广到高维欧氏空间中，我们可以得到

练习 28.13. $\mathbb{E}^n$ 中的子集紧致当且仅当它是有界闭集。

28.2 紧致性与分离性

虽然我们证明欧氏空间中的紧致集合是闭集，但对一般的拓扑空间，这不总是对的。一方面，紧致子集未必是闭集，甚至更坏，紧致子集的闭包未必是紧致的；另一方面，在某些条件下，紧致子集是闭集。

例 28.14 (紧致但不闭的子集)**.** 令 X 为多于两个元素的集合，赋予平凡拓扑。则 X 中的单点集合紧致但不闭。一个不太平凡的例子是 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑 $\mathcal{T}_f$。$\mathbb{Z}$ 不是 $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ 中的闭集，但 $\mathbb{Z}$ 是紧致的。事实上，$(\mathbb{R},\mathcal{T}_f)$ 的任何子集都是紧致的。

练习 28.15. 构造拓扑空间 X 及其紧致子集 A，使得 A 的闭包 $\overline{A}$ 不紧致。

命题 28.16. *Hausdorff* 空间中，紧致子集和不相交的点有不相交的开邻域。从而 *Hausdorff* 空间的紧致子集是闭集。

证明. 设 A 是 Hausdorff 空间 X 的紧致子集，$x \in X \setminus A$。对任何点 $y \in A$，因 X 是 Hausdorff 空间，存在 x 和 y 的不相交的开邻域 U_y 和 V_y。开集族 $\left\{V_y \,\middle|\, y \in A\right\}$ 构成 A 的开覆盖，因 A 紧致，故有有限的子覆盖。设 $V_{y_1},\cdots,V_{y_n}$ 是覆盖 A，令 $V = V_{y_1} \cup \cdots V_{y_n}$，$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$，则 U 和 V 是 x 和 A 的不相交的开邻域。

对任何点 $x \in X \setminus A$，存在 x 与 A 的不相交的开邻域，所以 x 是 $X \setminus A$ 的内点。由 x 的任意性，$X \setminus A$ 是开集，故 A 为闭集。 □

命题 28.17. 从紧致空间到 *Hausdorff* 空间的一一连续满射必为同胚。

证明. 设 $f:X\to Y$ 是从紧致空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的一一连续满射。设 E 是 X 的闭子集，因 X 紧致，故 E 紧致，从而 $F=f(E)$ 是 Y 的紧致子集。因 Y 是 Hausdorff 空间，故 F 是闭集，从而 f 使闭映射。这说明 f^{-1} 是连续映射。所以 f 是同胚。 □

练习 28.18. *从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续单射必为嵌入。*

命题 28.19. *Hausdorff 空间的两个不相交的紧致子集有不相交的邻域。*

证明. 设 A 与 B 是 Hausdorff 空间 X 的两个不相交的紧致子集。由命题28.16，每个点 $x\in A$ 与 B 有不相交的开邻域 U_x 与 V_x。这样的开集族 $\{U_x\,|\,x\in A\}$ 构成 A 的开覆盖，而 A 紧致，故有有限子覆盖。设 $U_{x_1},\cdots,U_{x_n}$ 是这样的一个有限子覆盖。令

$$U=U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_n},\qquad V=V_{x_1}\cap\cdots\cap V_{x_n}$$

则 U 与 V 是 A 和 B 的不相交的开邻域。 □

命题 28.20. *紧致的 Hausdorff 空间满足 T_3 与 T_4 公理。*

证明. 设 X 是紧致的 Hausdorff 空间，E 与 F 是 X 的不相交的闭集。由命题28.7，E 与 F 紧致。由命题28.19，E 与 F 有不相交的开邻域，所以 X 是 T_4 空间。因 Hausdorff 空间中单点集是闭集，所以 X 也满足 T_3 公理。 □

28.3 紧致与列紧

命题 28.21 (Bolzano-Weierstrass 性质)**.** *紧致空间的无穷子集必有聚点。*

证明. 设 X 是紧致空间，$\{x_n\}$ 是 X 的没有聚点的无穷子集。对任何 $x\in X$，存在开邻域 U_x 使得 $U_x\cap\{x_n\}$ 是有限集。这样的开集族 $\{U_x\,|\,x\in X\}$ 构成 X 的开覆盖，因 X 紧致，故有有限的子覆盖。这说明 $\{x_n\}$ 是有限集。矛盾。 □

定义 28.22. 一个拓扑空间称为**列紧的** (sequentially compact)，如果它的任何无穷序列都有收敛子列。

一个序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0，如果 x_0 的每个邻域都包含 $\{x_n\}$ 中除有限多个点之外的所有点。

例 28.23. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑 $\mathcal{T}_f$，既是紧致的，也是列紧的。

命题 28.24. *列紧空间上的实值连续函数有界，并且达到它的最大最小值。*

证明. 设 X 是列紧的拓扑空间，$f:X\to\mathbb{E}^1$ 是连续函数。如果 $f(x)$ 无界，则 $g(x)=|f(x)|$ 无界，且存在序列 $\{x_n\}\subset X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x)=+\infty$。因为 X 列紧，故序列 $\{x_n\}$ 有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$。设 $x_{n_k}\to x_*$。因为 $g(x)$ 连续，故 $U=g^{-1}((g(x_*)-1,g(x_*)+1))$ 是 x_* 的邻域。因为 $x_{n_k}\to x_*$，存在 $K\in\mathbb{N}$ 使得当 $k>K$ 时，$x_{n_k}\in U$，从而当 $k>K$ 时，

$$g(x_*)-1<g(x_{n_k})<g(x_*)+1$$

这与 $g(x_{n_k})\to+\infty$ 矛盾。于是 $f(x)$ 有界。设 $M=\sup\limits_{x\in X}f(x)$，则存在序列 $\{x_n\}$，使得 $f(x_n)\to M$。因为 X 列紧，故 $\{x_n\}$ 有收敛子列，不妨设 $\{x_n\}$ 本身收敛到 $x_{\max}$。f 的连续性给出 $f(x_{\max})=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$。于是 f 达到最大值，同理 f 也达到最小值。 □

推论 28.25. *第一可数的紧致空间都是列紧的。*

证明. 设 X 是第一可数的紧致空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的无穷序列。由 Bolzano-Weierstrass 性质，存在点 $x_0 \in X$，使得 x_0 的每个邻域都包含 $\{x_n\}$ 中无穷多项。因为 X 是第一可数的，可取 x_0 的可数邻域基 $\{U_n\}$，使得 $m > n$ 时有 $U_m \subset U_n$。任取 n_1 使得 $x_{n_1} \in U_1$，取 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} \in U_2$；以此类推。则子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x_0。 □

定理 28.26. *一个度量空间是紧致的当且仅当它是列紧的。*

证明. 设 X 是紧致的度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的无穷序列。如果某个点 x_m 在此序列中出现无穷多次，那么子序列 $\{x_k \in \{x_n\} \mid x_k = x_m\}$ 收敛到 x_m。否则，我们可以假设当 $n \neq m$ 时有 $x_n \neq x_m$。由 Bolzano-Weierstrass 性质，$\{x_n\}$ 有一个极限点，设为 x_0。对任何 $k \in \mathbb{N}$，$B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \cap \{x_n\}$ 是无穷集合。任取点 $x_{n_1} \in \{x_n\} \cap B(x_0, 1)$。设 $x_{n_1}, \cdots, x_{n_{k-1}}$ 已经取好，选取点 $x_{n_k} \in \{x_n\} \cap B\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$，使得 $n_k > n_{k-1}$。则 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x_0，所以 X 列紧。

反之，设 X 是列紧的度量空间。对于 X 的开覆盖 $\mathcal{C}$，下证 $\mathcal{C}$ 有有限子覆盖。

首先，我们证明存在 $\delta > 0$，使得对任意 $x \in X$，存在 $U \in \mathcal{C}$ 使得 $B(x, \delta) \subset U$。如若不然，则对于任意自然数 n，存在 $x_n \in X$，使得对任意 $U \in \mathcal{C}$，有 $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \setminus U \neq \emptyset$。因为 X 列紧，序列 $\{x_n\}$ 有一个收敛子列，不妨让 $\{x_n\}$ 本身收敛到 x_*。设 $x_* \in U_* \in \mathcal{C}$。则存在 $\delta_* > 0$，使得 $B(x_*, \delta_*) \subset U_*$。因为 $x_n \to x_*$，$B\left(x_*, \frac{\delta_*}{2}\right) \cap \{x_n\}$ 是无穷集合，所以存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_{n_0} \in B\left(x_*, \frac{\delta_*}{2}\right)$ 并且 $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta_*}{2}$。对任何 $y \in B\left(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}\right)$，我们有

$$d(x_*, y) \leqslant d(x_*, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) \leqslant \frac{\delta_*}{2} + \frac{1}{n_0} < \frac{\delta_*}{2} + \frac{\delta_*}{2} = \delta_*$$

所以 $B\left(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq U_*$，这与 $\{x_n\}$ 的构造矛盾。

其次，我们证明存在有限子集 $A = \{z_1, \cdots, z_m\}$ 使得对任何点 $x \in X$，有 $d(x, A) < \delta$。如若不然，任取点 $z_1 \in X$，用归纳法，取 $z_k \in X$ 使得对任何 $i < k$ 有 $d(z_k, z_i) > \delta$。我们的假设保证了 z_k 的存在性。这样我们得到了无穷序列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对任何 $i \neq j$ 有 $d(z_i, z_j) > \delta$。此序列不可能有收敛子列。这与 X 列紧矛盾。

对每个 $z_k \in A$，取 $U_k \in \mathcal{C}$，使得 $B(z_k, \delta) \subset U_k$。则 $\{U_1, \cdots, U_m\}$ 是 X 的有限覆盖。所以 X 紧致。 □

在定理的证明中，我们得到如下的 Lebesgue 引理：

命题 28.27 (Lebesgue 引理)**.** *设 X 是紧致的度量空间，$\mathcal{C}$ 是 X 的开覆盖，则存在正实数 $\delta > 0$ 使得 X 的任何直径小于 δ 的子集都包含在 $\mathcal{C}$ 的某个成员中。δ 称为 $\mathcal{C}$ 的* Legesgue 数。

28.4 乘积空间的紧致性质

命题 28.28. *乘积空间 $X \times Y$ 紧致当且仅当 X 与 Y 均紧致。*

引理 28.29. *设 $A \subset X$ 是紧致子集，$y \in Y$。设 $W \subset X \times Y$ 是 $A \times \{y\}$ 的邻域。则存在 A 的开邻域 $U \subseteq X$ 和 y 的开邻域 $V \subseteq Y$，使得 $U \times V \subset W$。*

证明. 任何点 $(x, y) \in A \times \{y\}$ 都是 W 的内点，在乘积拓扑之下，存在开集 $U_x \subseteq X$ 和 $V_x \subseteq y$ 使得 $(x, y) \in U_x \times V_x \subseteq W$。$\{U_x, x \in A\}$ 构成 A 的开覆盖，因 A 紧致，故有有限子覆盖，设 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$ 是这样的有限子覆盖。令 $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ 及 $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$。则 U 是 A 在 X 中的开邻域，V 是 y 在 Y 中的开邻域，并且 $U \times V \subset W$。 □

命题28.28的证明. 假设 $X \times Y$ 紧致。X 和 Y 分别是投射 $p_X : X \times Y \to X$ 和 $p_Y : X \times Y \to Y$ 的像集。因为紧致集的连续像紧致，故 X 与 Y 均紧致。

设 X 与 Y 紧致，$\mathcal{C}$ 是 $X \times Y$ 的开覆盖。对任何点 $y \in Y$，我们有 $X \times \{y\} \cong X$，从而紧致。$\mathcal{C}$ 也是 $X \times \{y\}$ 的开覆盖，所以有有限子覆盖 $\mathcal{C}_y$。令 W_y 为 $\mathcal{C}_y$ 中所有开集之并。由引理，存在 y 的开邻域 V_y 使得 $X \times V_y \subseteq W_y$。开集族 $\{V_y, y \in Y\}$ 是 Y 的开覆盖，因为 Y 紧致，故有有限子覆盖，设为 $\{V_{y_1}, \cdots, V_{y_m}\}$。因为每个 $\mathcal{C}_{y_i}$ 有限，所以 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{y_1} \cup \cdots \mathcal{C}_{y_m}$，有限，并且 $\mathcal{C}_0$ 覆盖 $X \times Y$。因此 $X \times Y$ 紧致。 □

运用数学归纳法，可以证明有限多个紧致空间的乘积在乘积拓扑下紧致。在承认选择公理的前提下，有如下更广泛的定理

定理 28.30 (Tychonoff 定理)**.** *设 X_α $(\alpha \in \Lambda)$ 是一族非空的紧致空间，则在乘积拓扑之下，$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 紧致。*

28.5 局部紧致与仿紧空间

定义 28.31. 拓扑空间 X 称为*局部紧致的* (locally compact)，如果每个点 $x \in X$ 都有紧致的邻域。

例如，紧致空间都是局部紧致的，欧氏空间 $\mathbb{E}^n$ 也是局部紧致的。

练习 28.32. *设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，则*

- *X 是正则空间。*
- *对 $\forall x \in X$，x 的紧致邻域构成邻域基。*
- *X 的开子集也是局部紧致的。*

定义 28.33. 拓扑空间 X 称为*仿紧的* (paracompact)，如果对任何 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$，存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}'$，使得

1. 任何 $U' \in \mathcal{U}'$ 都包含在某个 $U \in \mathcal{U}$ 中。
2. 任何 $x \in X$ 都存在邻域 V 使得

$$\#\left\{U' \in \mathcal{U}' \mid U' \cap V \neq \emptyset\right\} < \infty$$

紧致空间都是仿紧的，取 $\mathcal{U}'$ 为有限子覆盖即可。欧氏空间也是仿紧的，这可以从 $[-n, n]^n$ 的紧致性得出。

练习 28.34. *仿紧的拓扑空间具有如下性质*

- *仿紧的 Hausdorff 空间都是正规空间。*
- *局部紧致的第二可数的 Hausdorff 空间是仿紧的。($\mathbb{E}^n$ 的仿紧性可以这样得到。)*
- *度量空间都是仿紧的。*

28.6 拓扑空间的紧致化[1]

定义 28.35. 设 Y 是紧致的 Haussdorff 空间，$X \subset Y$ 赋予子空间拓扑，若 $\overline{X} = Y$，则称 Y 是 X 的**紧致化** (compactification)。设 Y 与 Z 都是 X 的紧致化，若存在同胚 $h : Y \to X$ 使得对 $\forall x \in X$ 有 $h(x) = x$，则称 Y 与 Z **等价** (equivalent)。若 X 的紧致化 Y 满足 $Y \setminus X$ 是单点集，则称 Y 为 X 的**一点紧致化** (one-point compactification)。

练习 28.36. *证明：拓扑空间 X 的一点紧致化若存在，则具有唯一性。*

定理 28.37. *拓扑空间 X 具有一点紧致化当且仅当 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间。*

设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，我们来构造 X 的一点紧致化。取不属于 X 的元素 ∞，定义 $Y = X \cup \{\infty\}$。定义

$$\mathcal{T} = \left\{ U \,\middle|\, U \subset X \text{ 开，或 } T \setminus U \subset X \text{ 在 } X \text{ 中紧致} \right\}$$

则 $\mathcal{T}$ 是 Y 上的拓扑。$(Y, \mathcal{T})$ 是 X 的一点紧致化。

若 X 本身紧致，则 X 的一点紧致化是 X 与一个孤立单点的并。若 X 自身不紧致，则在 X 的一点紧致化 Y 中，有 $\overline{X} = Y$。

空间 X 称为**完全正则的** (completely regular)，若单点集在 X 中闭，且对 $\forall x_0 \in X$ 及 X 的不包含 x_0 的闭子集 A，存在连续函数 $f : X \to [0, 1]$，使得 $f(x_0) = 1$ 及 $f(A) = \{0\}$。

定理 28.38 (Stone-Cech 存在性定理)**.** *设 X 是完全正则的拓扑空间，则存在 X 的紧致化 Y，使得任何 X 上的有界连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 可唯一地延拓为 Y 上的连续函数 $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$。*

定理 28.39 (Stone-Cech 唯一性定理)**.** *设 X 是完全正则的拓扑空间，设 Y 与 Z 都是 X 的紧致化，满足定理28.38中的延拓性质，则 Y 与 Z 等价。*

定义 28.40. 设 X 是完全正则的拓扑空间，X 的满足定理28.38中延拓性质的紧致化称为 X 的 *Stone-Čech* **紧致化** (Stone-Čech compactification)，记为 $\beta(X)$。$\beta(X)$ 可被如下性质刻画：对从 X 到任何紧致 Hausdorff 空间 C 的任何连续映射 $f : X \to C$ 可唯一地延拓为连续映射 $g : \beta(X) \to C$。

[1] 此小节不属于讲授内容