

20 双曲几何的 Poincaré 圆盘模型

20.1 单位圆盘 \mathbb{D} 及其上的 Möbius 变换

定义 20.1. 设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 为平面上的单位圆盘, \mathbb{D} 的边界圆周 $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 被称为无穷远圆 (circle at infinity), 记为 S_∞^1 . 定义 Möbius 变换群 \mathcal{M}_2^+ 的子群

$$\mathcal{H} = \{\phi \in \mathcal{M}_2^+ \mid \phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}. \quad (20.1)$$

$(\mathbb{D}, \mathcal{H})$ 称为双曲几何的 Poincaré 圆盘模型 (Poincaré disk model for hyperbolic geometry), \mathbb{D} 称为双曲平面 (hyperbolic plane), \mathcal{H} 称为双曲几何变换群 (transformation group in hyperbolic geometry). $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup S_\infty^1$ 称为 \mathbb{D} 的欧氏闭包 (Euclidean closure).

对每个与 S_∞^1 正交的圆或直线 Γ , 关于 Γ 的反演或反射 σ 保持 \mathbb{D} 不变, 故两个这样的变换的复合给出 \mathcal{H} 中的 Möbius 变换.

定义 20.2. 关于与 S_∞^1 正交的圆或直线 Γ 的反演或反射称为双曲平面的反射 (reflection of the hyperbolic plane), 或双曲反射 (hyperbolic reflection).

命题 20.3. 任何 \mathcal{H} 中的 Möbius 变换都可表示为两个双曲反射的复合.

证明. 设 ϕ 是 \mathcal{H} 中的 Möbius 变换, 令 $z_0 = \phi^{-1}(0)$, z_0^* 为 z_0 关于 S_∞^1 的对称点. 因 Möbius 变换保持关于圆的对称点, 故 $\phi(z_0^*)$ 关于 S_∞^1 与 $\phi(z_0) = 0$ 对称, 即 $\phi(z_0^*) = \infty$. 同时, 存在 $z_1 \in S_\infty^1$, 使得 $\phi(z_1) = 1$.

若 $z_0 = 0$, 则 $z_0^* = \infty$, 故 0 和 ∞ 是 ϕ 的不动点. 由例 18.18 可知, 存在 $r > 0$ 和 $0 \leq \theta < 2\pi$, 使得 $\phi(z) = re^{i\theta}z$. 因 $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, 有 $r = 1$, 故 ϕ 是关于 0 的旋转, 这是两个关于过点 0 的欧氏直线的双曲反射的复合.

若 $z_0 \neq 0$, 则 $z_0^* \neq \infty$. 如图 52, 以线段 $\overline{0z_0^*}$ 为直径作圆 C_1 , 设 p 是 C_1 与圆 S_∞^1 的一个焦

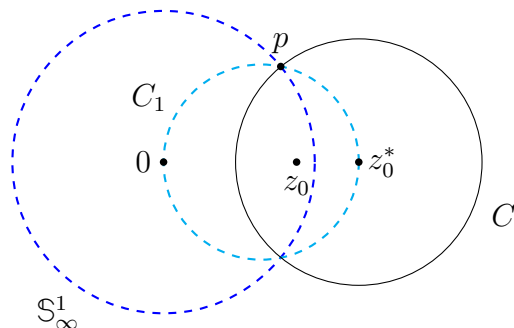


图 52: 构造与 S_∞^1 正交的圆, 将 z_0 反演到 0

点. 以 z_0^* 为圆心作圆 C 经过点 p . 则 $\angle 0pz_0^*$ 是直角, 故圆 S_∞^1 与圆 C 正交, 关于 C 的反演 ϕ_1 保持 S_∞^1 不变. $\phi_1(z_0^*) = \infty$, 而反演保持关于圆的对称点, 故 $\phi_1(z_0) = 0$.

设 $z'_1 = \phi_1(z_1)$. 取 z'_1 和点 1 的中垂线 l , 则关于 l 的反射 ϕ_2 将 z'_1 映为 1 , 并且保持 0 和 ∞ 不动.

$\phi_2 \circ \phi_1$ 将 z_0, z_0^*, z_1 分别映为 $0, \infty, 1$. 由命题 18.17 的唯一性, 可知 $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$.

□

命题 20.4. 给定 $z_0 \in \mathbb{D}$ 和 $z_1 \in S_\infty^1$, 存在 \mathcal{H} 中的 Möbius 变换 ϕ , 使得 $\phi(z_0) = 0$ 且 $\phi(z_1) = 1$.

将命题 20.3 证明中构造的 ϕ_1 表示出来, 则有

命题 20.5. 记 $O = (0, 0) \in \mathbb{D}$. 对任何点 $a \in \mathbb{D} \setminus \{O\}$, 存在唯一的双曲反射 $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 使得 $\sigma(a) = O$, σ 有表达式

$$\sigma(z) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1}. \quad (20.2)$$

命题 20.6. 过任意两点 $a, b \in \mathbb{D}$ 存在唯一的双曲直线。过双曲直线 l 外一点 c , 存在无穷多条与 l 不交 (即平行) 的双曲直线。

证明. 由命题 20.5, 存在双曲直线反射 $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 使得 $\sigma(a) = O$. 过 O 的双曲直线均为 \mathbb{D} 的欧氏直径, 故过 O 与 $\sigma(b)$ 有唯一的双曲直线 l_1 . 于是 $\sigma(l)$ 是过 a 与 b 的唯一的双曲直线。

同样, 由命题 20.5, 存在双曲直线反射 $\sigma: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 使得 $\sigma(c) = O$. 如图 53, $\sigma(l)$ 是与 $\partial\mathbb{D}$ 正

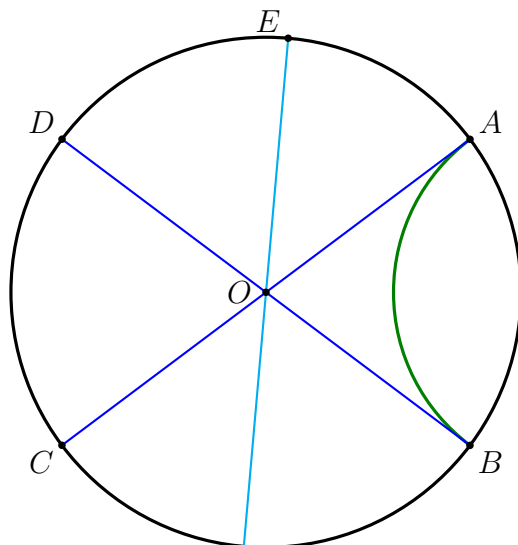


图 53: 与给定双曲直线不交的双曲直线

交的圆弧, 设 $\sigma(l)$ 所在的圆与 $\partial\mathbb{D}$ 交于 A, B 两点, 设 C, D 分别为直线 OA, OB 与 $\partial\mathbb{D}$ 的另一交点。则对劣弧 AD 上的任何点 E , 过 E 的直径 l_E 是与 $\sigma(l)$ 不交的双曲直线。劣弧 AD 上有无穷多个点, 故存在无穷多条过 O 的直线与 $\sigma(l)$ 不交, 从而存在无穷多条过 c 的直线与 l 不交。□

命题 20.7. 任给双曲直线 l , 存在 Möbius 变换 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 使得 $\phi(l)$ 是 \mathbb{D} 中的实直线。

命题 20.8. 任给圆周 S_∞^1 上的两个三点组 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 和 $\{w_1, w_2, w_3\}$, 存在至多三个双曲直线的反射, 使得它们的复合变换 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 满足

$$\phi(z_1) = w_1, \quad \phi(z_2) = w_2, \quad \phi(z_3) = w_3.$$

证明. □

命题 20.9. 任何 \mathbb{D} 上的 Möbius 变换 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 可表示为

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1 \quad (20.3)$$

任何反 Möbius 变换 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 可表示为

$$\phi(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{a\bar{z} - 1}, \quad |a| < 1$$

证明. □

20.2 Poincaré 圆盘中的度量

定义 20.10. 对双曲平面 \mathbb{D} 中的两点 z_1, z_2 , 设 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_\infty^1$ 是过 z_1, z_2 的双曲直线的端点, 使得 z_1 在 ξ_1, z_2 之间, 定义 z_1, z_2 之间的双曲距离 (hyperbolic distance) 为

$$\rho(z_1, z_2) = -\log(z_1, z_2; \xi_1, \xi_2) = \log \frac{|z_1 - \xi_2| \cdot |z_2 - \xi_1|}{|z_1 - \xi_1| \cdot |z_2 - \xi_2|} \quad (20.4)$$

命题 20.11. 式(20.4)中定义的 d 满足如下性质

1. (正定性) 对任何 $z, w \in \mathbb{D}$, 有 $\rho(z, w) \geq 0$, $\rho(z, w) = 0$ 当且仅当 $z = w$;
2. (对称性) 对任何 $z, w \in \mathbb{D}$, 有 $\rho(z, w) = \rho(w, z)$;
3. 若 z_2 在点 z_1, z_3 所决定的双曲线段上, 则

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3) \quad (20.5)$$

4. d 在双曲变换下保持不变, 即双曲变换是 (\mathbb{D}, d) 上的保距变换.

证明. □

命题 20.12. 对任何 $z \in \mathbb{D}$, 有

$$d(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \quad (20.6)$$

证明. □

命题 20.13. 对任何两点 $z, w \in \mathbb{D}$, 有

$$d(z, w) = \log \frac{|\bar{z}w - 1| + |z - w|}{|\bar{z}w - 1| - |z - w|} \quad (20.7)$$

证明. □

练习 20.14. 对 $z, w \in \mathbb{D}$, 证明

1.

$$\cosh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

2.

$$\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

3.

$$\tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|$$

从公式(20.7)可看出, 从原点 O 到以 O 为圆心以 r 为半径的圆上的点 z 的双曲距离为

$$\rho(O, z) = \ln \frac{r}{1 - r} \quad (20.8)$$

式(20.8)表明, 对任何无穷远点 $a \in \mathbb{S}_\infty^1$ 和 $b \in \mathbb{D}$, 由 $\rho(a, b) = \infty$ 。

到点 a 的双曲距离为 r 的点组成以 a 为圆心的双曲圆 Γ 。对 $z \in \Gamma$, 有

$$d(z, a) = \log \frac{|\bar{a}z - 1| + |z - a|}{|\bar{a}z - 1| - |z - a|} = r$$

故

$$\frac{|\bar{a}z - 1| + |z - a|}{|\bar{a}z - 1| - |z - a|} = e^r, \quad |\bar{a}z - 1| = \frac{e^r + 1}{e^r - 1} |z - a|$$

记 $\delta = \frac{e^r + 1}{e^r - 1}$, 则有

$$(\delta^2 - |a|^2) z\bar{z} + (1 - \delta^2)\bar{a}z + (1 - \delta^2)a\bar{z} + \delta^2 |a|^2 - 1 = 0 \quad (20.9)$$

这是一个欧氏圆的方程, 其欧氏圆心为 $\frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 - |a|^2} a$ 。所以, 在 Poincaré 圆盘 \mathbb{D} 中的双曲圆也是欧几里德空间中的圆。

练习 20.15. 何时 \mathbb{D} 中的三个点决定一个双曲圆?

命题 20.16. 对双曲平面中任何三点 $\{z_1, z_2, z_3\}$, 有

$$\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geq \rho(z_1, z_3) \quad (20.10)$$

等号成立当且仅当 z_2 落在 $\{z_1, z_3\}$ 所决定的双曲线段上。

定义实数上的双曲正弦函数 \sinh 和双曲余弦函数 \cosh 为

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (20.11)$$

定理 20.17 (双曲几何的三角公式). 设 Δ 是双曲三角形, 三边长分别为 a, b, c , 对角分别为 α, β, γ 。设 $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (从而 a, b, c 均为有限值)。则有

1. 正弦定理:

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma} \quad (20.12)$$

2. 余弦定理:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \quad (20.13)$$

3. 对偶余弦定理:

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (20.14)$$

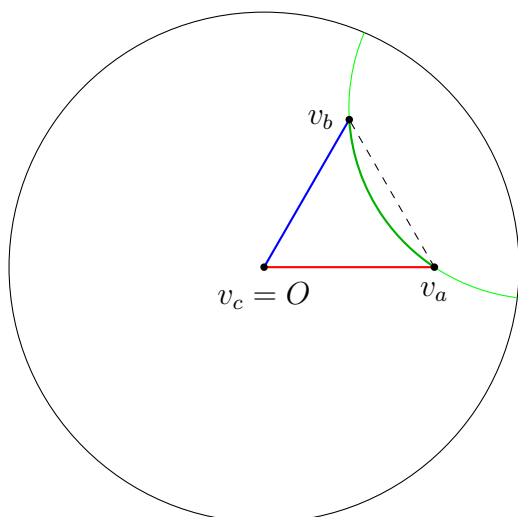


图 54: 余弦定理的证明

证明.

□

称两个双曲三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是全等的 (congruent), 若存在双曲变换 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 使得

$$\phi(A) = A', \quad \phi(B) = B', \quad \phi(C) = C'$$

命题 20.18. 两个双曲三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 全等当且仅当

1. SSS: 它们的对应三边的边长相等
2. AAA: 它们对应三角的角度相等;
3. SAS: 它们两个对边的长度及其夹角相等;
4. ASA: 它们两个对应夹角及其共同边的长度相等。

证明.

□

命题 20.19. 对任何 $a \in \mathbb{D}$, 有

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\rho(z, a)}{|z - a|} = \frac{2}{1 - |a|^2} \quad (20.15)$$

ρ 可与如下微分定义的度量相同

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \quad (20.16)$$

定义 20.20. 若 $\mathbf{r}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ 是双曲平面 \mathbb{D} 中的光滑曲线, 定义 \mathbf{r} 的长度为

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \int_a^b \frac{2}{1 - |\mathbf{r}(t)|^2} |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (20.17)$$

命题 20.21. 设 $z = a > 0$ 是双曲平面 \mathbb{D} 中实轴上的点, $\mathbf{r}(t) = t$, 则

$$\rho(0, z) = \mathcal{L}(\mathbf{r}) = \int_0^a \frac{2}{1 - |\mathbf{r}(t)|^2} |\mathbf{r}'(t)| dt$$

练习 20.22. 双曲半径为 r 的双曲圆的周长为 $2\pi \sinh(r)$ 。

21 双曲几何的上半平面模型

取扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的如下的 Möbius 变换 ψ 。如图 55 所示, ψ 先关于中心在 i 、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆 C

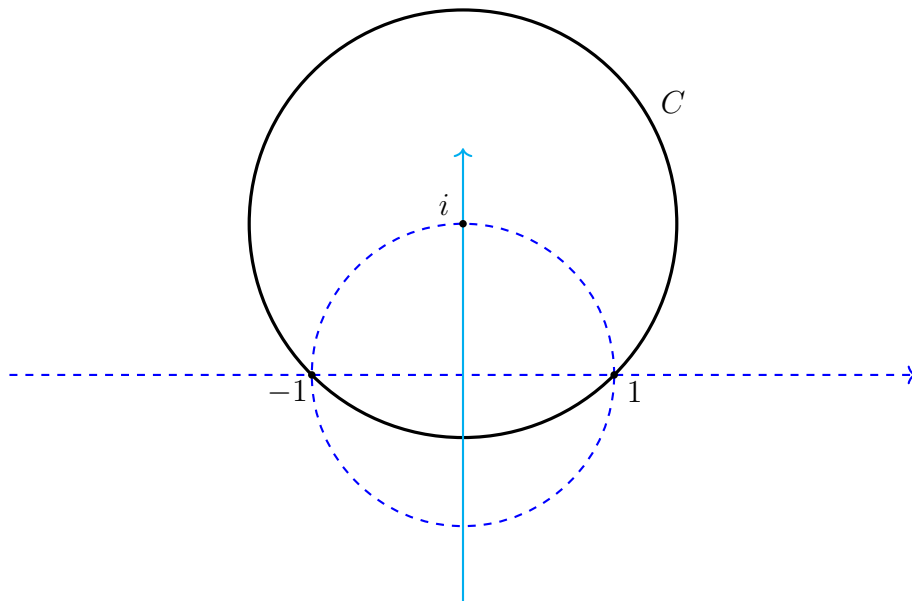


图 55: 从 Poincaré 圆盘到上半平面的 Möbius 变换

做反演变换, 再关于实轴反射。则 ψ 保持 -1 和 1 不动, 将 i 映为 ∞ , 将 ∞ 映为 $-i$ 。由命题 18.20, ψ 的表达式为

$$\psi(z) = \frac{-iz + 1}{z - i} \quad (21.1)$$

则 ψ 把共形圆盘 \mathbb{D} 保向地变成上半平面

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \quad (21.2)$$

ψ 的逆变换为

$$\phi^{-1}(w) = \frac{iw + 1}{w + i} \quad (21.3)$$

令

$$\rho_{\mathbb{U}}(z, w) = \rho_{\mathbb{D}}(\sigma^{-1}(z), \sigma^{-1}(w)) \quad (21.4)$$

定义了 \mathbb{U} 上的距离, $(\mathbb{U}, \rho_{\mathbb{U}})$ 是一个度量空间, 称为双曲平面的上半平面模型 (upper half-plane model)。 \mathbb{U} 的欧氏边界为无穷大圆 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 。

由 (21.4) 可知 $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ 与 $(\mathbb{U}, \rho_{\mathbb{U}})$ 等距同构。

定义 21.1. 度量空间 (X, d) 称为一个 2 维双曲几何空间, 若它等距同构于 $(\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}})$ 或 $(\mathbb{U}, \rho_{\mathbb{U}})$ 。

不考虑具体模型时, 2 维双曲几何空间记为 $(\mathbb{H}, \rho_{\mathbb{H}})$ 。 \mathbb{H} 的保向保距变换群 $\text{Isom}(\mathbb{H})$ 在 \mathbb{D} 模型中等同于 \mathcal{H} , 在上半平面模型 \mathbb{U} 中等同于 $\phi\mathcal{H}\phi^{-1}$ 。

Möbius 变换 (21.1) 将圆变为圆, 将与 S_{∞}^1 正交的圆或欧氏直线映为与无穷大圆 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 正交的圆或直线。故在上半平面模型 \mathbb{U} 中, 双曲直线为圆心在 \mathbb{R} 上的半圆或与 \mathbb{R} 垂直的直线。

命题 21.2. 对 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, 若 $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$, $\operatorname{Im}(z_1) > \operatorname{Im}(z_2)$, 则

$$\rho_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = -\log \frac{z_1}{z_2},$$

若 $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$, 设 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ 是实轴上的点, 且与实轴正交、且从 ξ_1 到 ξ_2 的有向半圆弧在上半平面顺次经过 z_1, z_2 , 则

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \log \frac{|z_2 - \xi_1| |z_1 - \xi_2|}{|z_1 - \xi_1| |z_2 - \xi_2|}$$

命题 21.3. 对两点 $z, w \in \mathbb{U}$, 有

1.

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

2.

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}$$

3.

$$\sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2 \sqrt{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}}$$

4.

$$\cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{2 \sqrt{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}}$$

5.

$$\tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$$

命题 21.4. 在上半平面模型 $(\mathbb{H}, \rho_{\mathbb{H}})$ 中, 保向保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1) \quad (21.5)$$

而反向保距变换都形如

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1) \quad (21.6)$$

我们用 $SL(2, \mathbb{R})$ 表示所有行列式为 1 的二阶实矩阵组成的群, 则其中的数量矩阵构成一个正规子群 (它同构于二元乘法群 $\{\pm 1\}$), 而商群记作 $PSL(2, \mathbb{R})$ 。验证 $PSL(2, \mathbb{R})$ 同构于上半平面模型的保向保距变换群。

我们用 $GL(2, \mathbb{R})$ 表示所有行列式非 0 的二阶实矩阵组成的群, 则其中的数量矩阵构成一个正规子群 (它同构于实数乘法群 \mathbb{R}^\times), 而商群记作 $PGL(2, \mathbb{R})$ 。验证 $PGL(2, \mathbb{R})$ 同构于上半平面模型的保距变换群。

对于一般的域 K , 也可以引入记号 $PGL(2, K)$, $PSL(2, K)$ (即域 K 上的二阶射影一般线性群和二阶射影特殊线性群)。我们总能把 $PSL(2, K)$ 自然含入 $PGL(2, K)$ 使之成为正规子群, 但相应的商群平凡当且仅当 K 的所有元素在 K 中都有平方根。例如, 由此可知 $PGL(2, \mathbb{C}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$, 但 $PGL(2, \mathbb{R}) \cong PSL(2, \mathbb{R}) \times \{\pm 1\}$ 。

练习 21.5. 在上半平面模型中, 直接证明欧氏圆也是双曲圆, 双曲圆都是欧氏圆。并给出双曲圆心和欧氏圆心之间的关系。

21.1 双曲面积和 Gauss-Bonnet 公式

对双曲平面 \mathbb{H} 的子集 $A \subset \mathbb{H}$, 若积分

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2} \quad (21.7)$$

存在, $\mu(A)$ 称为 A 的双曲面积 (hyperbolic area)。

一个双曲 n -边形是指有 n 段双曲测地线段界定的 $\tilde{\mathbb{H}}$ 的闭子集。如果两条线段相交, 它们的交点称为多边形的顶点。允许顶点在 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上。注意 \mathbb{R} 上的线段不可能属于双曲多边形。根据有 0, 1, 2, 3 个顶点在 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上, 双曲三角形有如下四种类型。

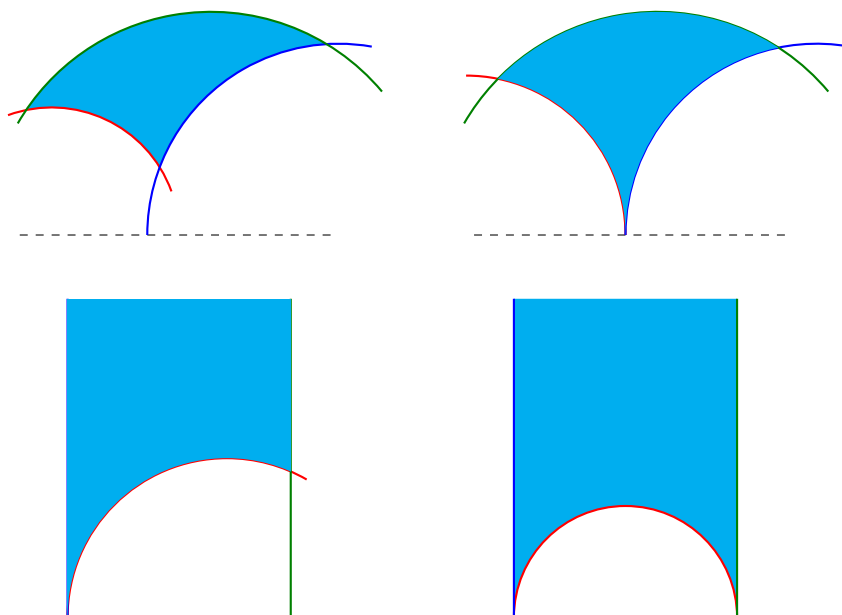


图 56: 双曲三角形

定理 21.6 (Gauss-Bonnet). 设双曲三角形 ABC 的角度分别为 α, β, γ , 则

$$\mu(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma \quad (21.8)$$

证明. 我们先考虑 $\triangle ABC$ 有一个顶点在 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的情形。设 $C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, 通过 $PSL(2, \mathbb{R})$ 的变换, 可设 $C = \infty$, 这样的变换不改变面积和角度。故可设双曲三角形 ABC 的两边 AC 和 BC 是垂直的双曲直线。边 AB 落在与 \mathbb{R} 正交的半圆上, 可通过平移 $z \mapsto z + k (k \in \mathbb{R})$ 和缩放 $z \mapsto \lambda z (\lambda > 0)$, AB 所在的半圆半径为 1, 圆心在 0, 如图 57 所示。考虑角 $\angle BAC$ 和 $\angle AOE$, 因 AC 与 OE 垂直, OA 与 AB 垂直, 易见 $\angle AOE = \angle BAC = \alpha$ 。同理可得 $\angle BOF = \beta$ 。设边 AC 和 BC 分别在双曲直线 $x = a$ 和 $x = b$ 上。则有

$$\mu(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

做替换 $x = \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$, 则有

$$\mu(\triangle ABC) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta.$$

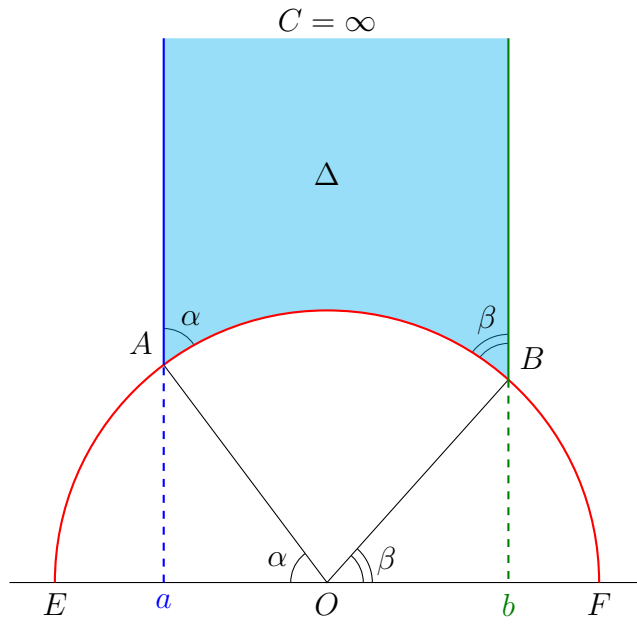


图 57: 一个顶点为 ∞ 的情形

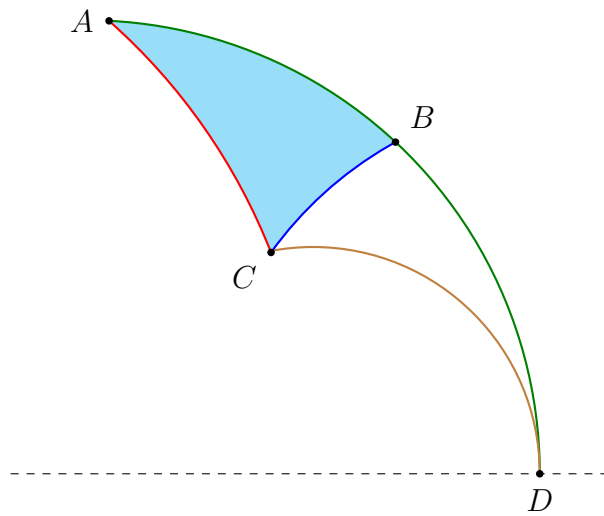


图 58: 所有角度大于 0 的情形

对 α, β, γ 均大于 0 的情形, 如图 58 所示, 设双曲射线 AB 交 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 于 D , 取双曲直线 CD . 设 $\angle BCD = \theta$. 因 $\angle CBD = \pi - \beta$, 由上一段的情形, 可知

$$\mu(\triangle BCD) = \pi - \theta - (\pi - \beta) = \beta - \theta.$$

对三角形 ACD 同样有

$$\mu(\triangle ACD) = \pi - (\alpha) - (\gamma + \theta) = \pi - \alpha - \gamma - \theta.$$

故

$$\mu(\triangle ABC) = \mu(\triangle AC) - \mu(\triangle BCD) = (\pi - \alpha - \gamma - \theta) - (\beta - \theta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

□

练习 21.7 (双曲三角形的 Heron 公式). 设双曲三角形 ABC 的边长分别为 a, b, c , 则 ABC 的面积 S 满足

$$\cos(S) = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta\gamma)}{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)} \quad (21.9)$$

$$\tan\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{\Delta}{1 + \alpha + \beta + \gamma} \quad (21.10)$$

$$\sin\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{\Delta}{4 \cosh\left(\frac{a}{2}\right) \cosh\left(\frac{b}{2}\right) \cosh\left(\frac{c}{2}\right)} \quad (21.11)$$

其中

$$\alpha = \cosh(a), \beta = \cosh(b), \gamma = \cosh(c), \quad \Delta = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma}$$

(提示: 用正弦定理、余弦定理和 Gauss-Bonnet 公式)

练习 21.8. 证明: 上半平面模型中的三点 $P_1 = (-2, 1), P_2 = (0, 1)$ 和 $P_3 = (2, 1)$ 不在任何双曲圆上, 也不在任何双曲直线上。故在双曲几何中, 不共线的三点不一定共圆。