19 复交比

若射影平面中共线四点 A,B,C,D 的齐次坐标分别为 $a+x_1b, a+x_2b, a+x_3b, a+x_4b$，则它们的交比为

$$(A,B;C,D)=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}$$

射影平面中共线四点的交比是射影变换下的不变量。

定义 19.1. 设 z_1,z_2,z_3,z_4 为扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的有序互异四点，定义它们的复交比为

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

若 z_1,z_2,z_3,z_4 中有无穷远点，涉及无穷远点的两个因子之比取作 1。

练习 19.2. 设 $(z_1,z_2;z_3,z_4)=\lambda$，验证

$$(z_2,z_1;z_3,z_4)=(z_1,z_2;z_4,z_3)=\lambda^{-1};\qquad (z_1,z_3;z_2,z_4)=1-\lambda;\qquad (z_3,z_4;z_1,z_2)=\lambda.$$

命题 19.3. *设 z_1,z_2,z_3,z_4 为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中四点。*

1. *若 $\sigma:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是 Möbius 变换，则 $(\sigma(z_1),\sigma(z_2);\sigma(z_3),\sigma(z_4))=(z_1,z_2;z_3,z_4)$；*
2. *$\sigma:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是反 Möbius 变换，则 $(\sigma(z_1),\sigma(z_2);\sigma(z_3),\sigma(z_4))=\overline{(z_1,z_2;z_3,z_4)}$。*

证明. Möbius 变换是偶数个反演变换的复合，反 Möbius 变换是奇数数个反演变换的复合。故只需要证明对反演变换 $\sigma:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$，有

$$(\sigma(z_1),\sigma(z_2);\sigma(z_3),\sigma(z_4))=\overline{(z_1,z_2;z_3,z_4)}.$$

设 σ 是关于圆心在 z_0、半径为 r 的圆的反演，则

$$\sigma(z)=z_0+\frac{r^2}{\overline{z}-\overline{z_0}}$$

故

$$\begin{aligned}(\sigma(z_1),\sigma(z_2);\sigma(z_3),\sigma(z_4))=&\frac{\left(\dfrac{r^2}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}-\dfrac{r^2}{\overline{z_3}-\overline{z_0}}\right)\left(\dfrac{r^2}{\overline{z_2}-\overline{z_0}}-\dfrac{r^2}{\overline{z_4}-\overline{z_0}}\right)}{\left(\dfrac{r^2}{\overline{z_1}-\overline{z_0}}-\dfrac{r^2}{\overline{z_4}-\overline{z_0}}\right)\left(\dfrac{r^2}{\overline{z_2}-\overline{z_0}}-\dfrac{r^2}{\overline{z_3}-\overline{z_0}}\right)}\\ =&\frac{\left(\overline{z_3}-\overline{z_1}\right)\left(\overline{z_4}-\overline{z_2}\right)}{\left(\overline{z_4}-\overline{z_1}\right)\left(\overline{z_3}-\overline{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right)}\\ =&\overline{(z_1,z_2;z_3,z_4)}\end{aligned}$$

□

命题 19.4. *扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上，互异四点 $\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ 共圆（包括无穷大圆）当且仅当它们的复交比是实数。*

证明. 设 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 共圆于 Γ，则关于 Γ 的反演变换 σ 保持 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 不动。因 Γ 反定向，由命题19.3，有

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (\sigma(z_1), \sigma(z_2); \sigma(z_3), \sigma(z_4)) = \overline{(z_1, z_2; z_3, z_4)}$$

故 $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ 是实数。

若四点 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 不共圆，由命题18.16，存在 Möbius 变换 σ，使得

$$\sigma(z_1) = 0, \sigma(z_2) = 1, \sigma(z_3) = \infty.$$

因 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 不共圆，故 $\sigma(z_4)$ 的虚部非零。故

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (\sigma(z_1), \sigma(z_2); \sigma(z_3), \sigma(z_4)) = \frac{1 - \sigma(z_4)}{0 - \sigma(z_4)} = \frac{1}{\sigma(z_4)} - 1$$

的虚部非 0，故 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 不是实数。 $\square$