18 Möbius 变换

18.1 反演与 Möbius 变换

如图44所示，一个 *Steiner* 圆链 (Steiner chain) 是 n 个圆，都与给定的两个圆（图44中的绿色与

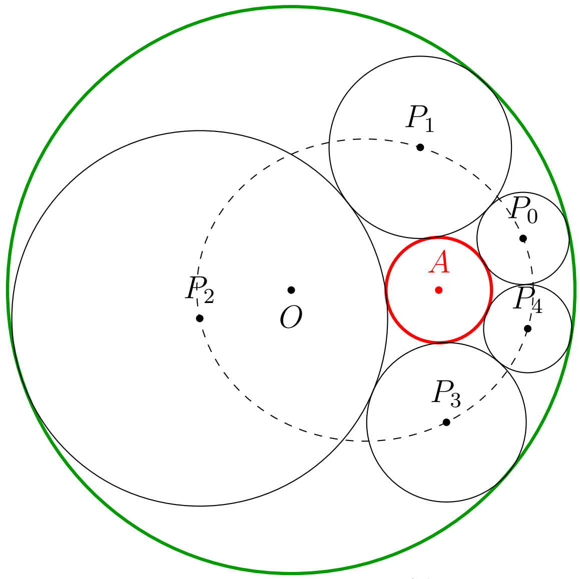

图 44: **Steiner 圆链**

红色圆）相切，并且相邻的两个圆相互外切。可选择适当的圆的反演，使得两个定圆成为同心圆，如图45所示, 这时，Steiner 圆链里的圆具有同样的半径。用圆的反演可以证明很多 Steiner

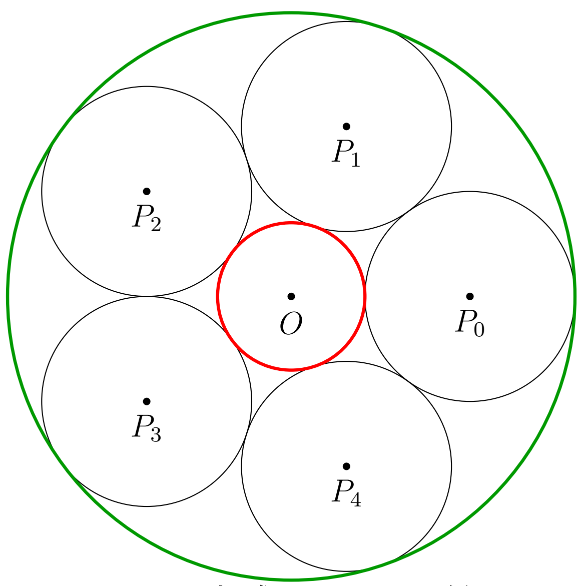

图 45: **标准 Steiner 圆链**

圆链的性质，比如 Steiner 圆链的切点在一个圆上。

图46隐含了一个定理。在运动过程中，红色圆在黑色圆内部，二者不相交，绿色圆和紫色圆都与红色圆外切，同时都内切于黑色圆，而且绿色圆、红色圆、紫色圆有两条外公切线。绿色圆

图 46: **具有公切线的 Steiner 圆链**

和紫色圆的圆心轨迹，是一个椭圆，称为 Arbelos 椭圆。两条外公切线的交点轨迹是一条直线。图中的具有公切线的圆链可通过圆的反演从图47中的标准的 Steiner 圆链得到。

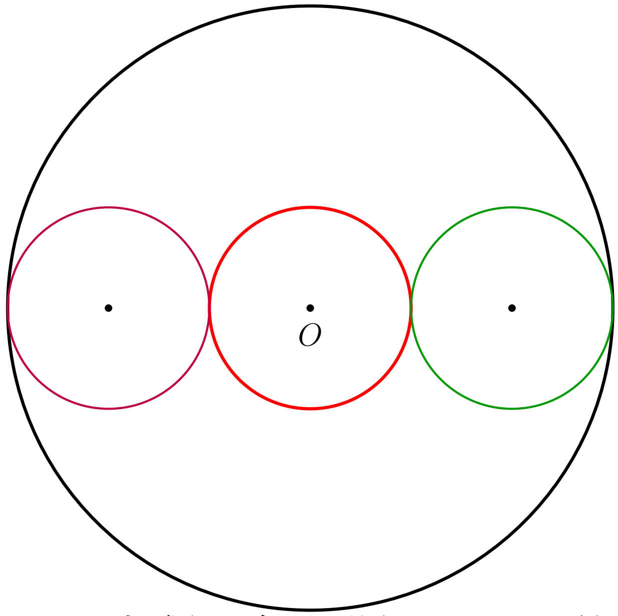

图 47: **标准的具有公切线的 Steiner 圆链**

球面 S^n 上的 *Möbius 变换*是球面关于 S^n 上的 $n-1$ 维球面的反射的复合。偶数个反射的复合是保持定向的，奇数个反射的复合是反定向的。Möbius 变换可由它将 $n-1$ 维球面映为 $n-1$ 维球面来刻画。关于某个 $n-1$ 维球面对称的点被映为关于另一个球面对称的点。

双曲几何的研究，特别是双曲三维流形的研究跟二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上的 Möbius 变换密切相关。通过如图48 所示的球极投影 (stereographic projection)，我们得到 $\mathbb{S}^2$ 与 $\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ 的等同。

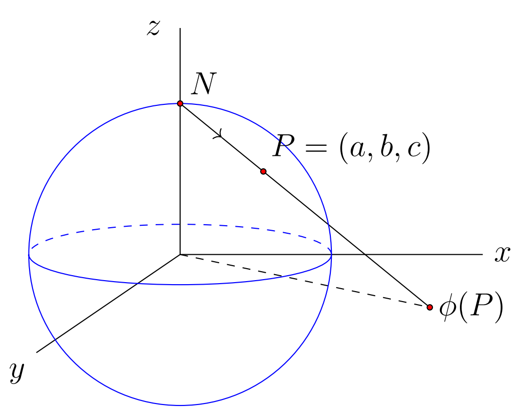

图 48: $\mathbb{S}^2$ 到 $\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$ 的球极投影。

定义 18.1. 如图49, 在平面 $\mathbb{E}^2$ 上给定中心为点 O、半径为 r 的定圆 C，关于圆 C 的*反演变换*

$$\sigma_C : \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$$

将 $P \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ 映到射线 OP 上的点 $\sigma(P)$，满足

$$|OP| \cdot |O\sigma(P)| = r^2$$

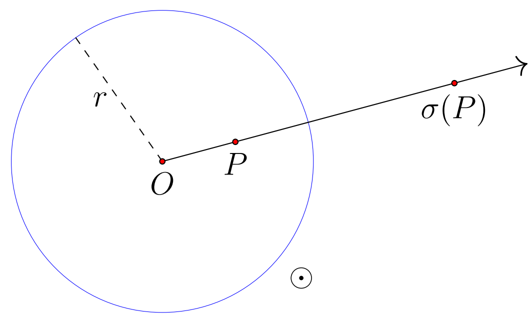

图 49: 关于圆的反演。

定义反演变换的定圆 C 称为*反演圆*，$\sigma(P)$ 称为 P 关于圆 C 的*对称点*。

例 18.2. 图50给出了圆、字母 M 和格子关于中心在点 O 的圆 C 的反演。圆的反演是圆，不与

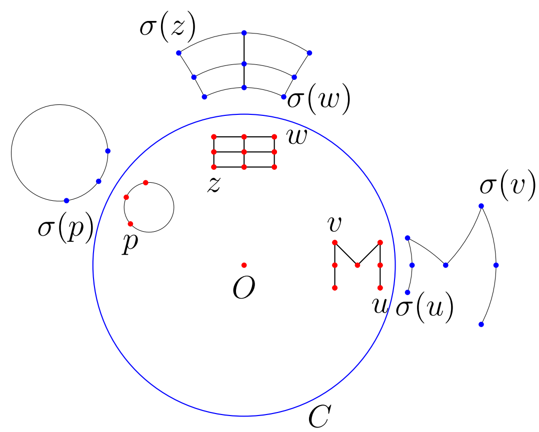

图 50: 图形的反演

圆 C 相交的直线的反演是圆，字母 M 中的线段的反演是圆弧。

在 $\mathbb{E}^2$ 上添加一个额外的点 ∞，称为*无穷远点*，得到*扩充平面* (extended plane)

$$\widehat{\mathbb{E}^2} = \mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$$

补充定义 $\sigma(O) = \infty, \sigma(\infty) = O$，则 $\sigma : \widehat{\mathbb{E}^2} \to \widehat{\mathbb{E}^2}$ 是扩充平面上的一一映射，称为关于圆 C 的*反演变换*。

命题 18.3. *设 Γ 是以 C 为圆心、a 为半径的圆。关于圆 Γ 的反演变换 σ 满足如下性质*

1. *反演变换 σ 以自身为逆变换，即 $\sigma \circ \sigma = \mathbb{1}$，且以反演圆 Γ 为不动点集。*

2. *反演变换 σ 把不经过反演圆心 C 的圆变成圆，把经过 C 的圆变成不经过 C 的直线。*

3. *反演变换 σ 保持与反演圆 Γ 正交的圆不变，保持经过反演圆心 C 的直线不变。*

证明. 性质 1 由定义立即得出。

对任何点 $P \in \Gamma$，记 $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$，则圆 Γ 的方程为 $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}| = a^2$。设 $\sigma(P) = Q$，记 $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$，则由 $\sigma(Q) = P$ 可知 $\boldsymbol{p} = r^2 \dfrac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^2}$，所以 $\sigma(\Gamma)$ 的方程为

$$\left| r^2 \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^2} - \boldsymbol{c} \right|^2 = a^2$$

我们有

$$\left| r^2 \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^2} - \boldsymbol{c} \right|^2 = \left(r^2 \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^2} - \boldsymbol{c} \right) \cdot \left(r^2 \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^2} - \boldsymbol{c} \right) = \frac{r^2}{|\boldsymbol{q}|^2} - \frac{2r^2(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{q}|^2} + |\boldsymbol{c}|^2$$

故 $\sigma(\Gamma)$ 的方程整理可得

$$\left(|\boldsymbol{c}|^2 - a^2 \right) |\boldsymbol{q}|^2 - 2r^2(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{c}) + r^4 = 0$$

这在 $|\boldsymbol{c}|^2 - a^2 \neq 0$ 时是圆的方程，否则是直线的方程。

性质 3 中关于直线的部分显然成立。关于正交圆的部分，利用 Γ 与反演圆正交的等价条件 $|\boldsymbol{c}|^2 - a^2 = r^2$，我们发现 $\sigma(\Gamma)$ 的方程和 Γ 的方程等价。 □

命题 18.4. *反演变换反向保角。*

证明. 设 P 是两圆 Γ_1 和 Γ_2 的一个交点，设经过 P 的切线分别为 ℓ_1 和 ℓ_2。我们选取切线的方向使得 P 发出的相应的射线 ℓ_1^+ 和 ℓ_2^+ 张成的角域包含两圆内部的交集。反演变换 σ 之下，这两条切线都变成过反演圆心 O 的圆 $\sigma(\ell_1)$ 和 $\sigma(\ell_2)$，并且它们的一个交点是反演圆心，另一个交点是 $\sigma(P)$。由图形的对称性可以看出，$\sigma(\ell_i)$ 在原点处的切线刚好平行于 ℓ_i，事实上 $\sigma(\ell_i^+)$ 在 O 的切方向刚好与 ℓ_i^+ 反向平行。所以有向圆弧 $\sigma(\ell_1^+)$ 和 $\sigma(\ell_2^+)$ 的切方向在共同终点 O 的夹角与 ℓ_1^+ 和 ℓ_2^+ 在 P 的夹角大小相等，符号相同。因为 $\sigma(P)$ 是有向圆弧 $\sigma(\ell_1^+)$ 和 $\sigma(\ell_2^+)$ 的共同起点，在那里它们的切方向夹角与终点 O 处大小相等，符号相反，所以也与射线 ℓ_1^+ 和 ℓ_2^+ 在 P 处的夹角等大反号。容易看出反演变换保持圆的相切关系 (通过保持交点个数)。这说明 $\sigma(\Gamma_1)$ 和 $\sigma(\Gamma_2)$ 在 $\sigma(P)$ 处夹角与 Γ_1 和 Γ_2 在 P 处夹角等大反向。 □

练习 18.5. 写出标准型的椭圆、双曲线关于单位圆反演后的方程，并画出其图形。

18.2 复坐标下的 Möbius 变换

习惯上，人们也把 $\mathbb{E}^2$ 看作全体复数组成的平面 $\mathbb{C}$，于是写成

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

改叫做*扩充复平面* (extended complex plane) 或黎曼面。

设 C 是中心在 z_0 的半径为 r 的圆，σ 是关于圆 C 的反演，则对 $z\in\mathbb{C}$，有

$$|z-z_0|\cdot|\sigma(z)-z_0|=r^2$$

从而有

$$\sigma(z)=z_0+\frac{r^2}{\overline{z}-\overline{z}_0} \tag{18.1}$$

关于单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 的反演为

$$\sigma_{\mathbb{S}^1}(z)=\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z}{|z|^2} \tag{18.2}$$

在(18.1)和(18.2)中，约定涉及无穷时，$\dfrac{1}{\infty}=0$，$\dfrac{1}{0}=\infty$。

$\mathbb{E}^2$ 上的直线 $ax+by+c=0$ 在复坐标下可表示为

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+c=0,\qquad \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\,,c\in\mathbb{R} \tag{18.3}$$

其中 $\alpha=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}i$。中心在 z_0，半径为 r 的圆可表示为

$$|z-z_0|^2=r^2$$

或者

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+c=0 \tag{18.4}$$

其中 $\alpha=-z_0,c=|z_0|^2-r^2$。

练习 18.6. 写出平移、旋转、位似、反射的复坐标表达式。

与圆的反演18.1类似，平面上的保距变换可以表示为

$$w=e^{i\theta}z+z_0\qquad 或\qquad w=e^{i\theta}\overline{z}+z_0. \tag{18.5}$$

位似变换可以表示为

$$w=\lambda z+(1-\lambda)z_0,\qquad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{18.6}$$

其中 $\lambda\neq 0$ 是位似系数。关于直线 $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+c=0$ 的反射可以表示为

$$w=-\frac{1}{\alpha}(\alpha\overline{z}+c) \tag{18.7}$$

$\mathbb{C}$ 上的一条直线 ℓ 与 ∞ 的并集 $\widehat{\ell}$ 可看做半径无穷大的圆，称为*无穷大圆*。规定关于 $\widehat{\ell}$ 的反演 $\sigma:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 为关于直线 ℓ 的直线反射，并且 $\sigma(\infty)=\infty$。故 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的圆由平面 $\mathbb{C}$ 中的圆和直线组成，$\widehat{\mathbb{C}}$ 上的每个圆 C 都对应反演变换 $\sigma_C:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$。

定义 18.7. 任意有限个反演变换复合而成的变换称为扩充平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个 *Möbius 变换* (Möbius transformation)。扩充平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的全体 Möbius 变换关于复合构成的变换群称为 *Möbius 变换群*，记作 $\mathcal{M}_2$。偶数个反演变换复合而成的 Möbius 变换构成的子群称为*保向 Möbius 变换群*，记作 $\mathcal{M}_2^+$；奇数个反演变换复合而成的 Möbius 变换构成的子群称为*反向 Möbius 变换群*，记作 $\mathcal{M}_2^-$。

练习 18.8. 验证 $\mathcal{M}_2$ 是群，$\mathcal{M}_2^+$ 是 $\mathcal{M}_2$ 的正规子群。试说明 $\mathcal{M}_2\cong\mathcal{M}_2^+\rtimes\mathbb{Z}_2$。

例 18.9. 设 L 是一个无穷大圆，可把关于 L 的反演写成普通反演的共轭如下。取 Γ 是圆心不在 L 上的普通圆，记关于 Γ 的反演为 σ_Γ。于是 $\sigma_\Gamma(L)$ 是普通圆 L'，记关于 L' 的反演为 $\sigma_{L'}$。于是 $\sigma_\Gamma\sigma_{L'}\sigma_\Gamma$ 把直线映成直线，圆映成圆，所以限制在欧氏平面只是相似变换。再由 $\sigma_\Gamma\sigma_{L'}\sigma_\Gamma$ 以 L 为不动点集且反向，可知它是关于无穷大圆 L 的反演变换。

特别地，关于无穷大圆的反演都是 Möbius 变换。

练习 18.10. *验证欧氏平面的平移、旋转、位似变换都可以唯一地延拓成扩充平面的 Möbius 变换，并保持无穷远点不动。*

练习 18.11. *说明 $z \mapsto \overline{z} + iz$ 不是 Möbius 变换，并领会这个映射针对平面各点的效果。*

定理 18.12. *扩充复平面上的保定向的 Möbius 变换 ϕ 可以表达为*分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

*扩充复平面上的反定向的 Möbius 变换 ϕ 可以表达为*共轭分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha \overline{z} + \beta}{\gamma \overline{z} + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

证明. (18.1) □

定理 18.13. *扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的分式线性变换*

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

是正伸缩变换和保定向保距变换的复合，或是一个反演变换和反定向保距变换的复合。扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的共轭分式线性变换

$$w = \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

是正伸缩变换和保定向保距变换的复合，或是一个反演变换和反定向保距变换的复合。