

14 射影变换

14.1 射影变换

定义 14.1. 设 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 是射影平面间的双射, 若 ϕ 将 $P(\Sigma)$ 中的直线映为 $P(\Sigma')$ 中的直线, 则称 ϕ 是一个射影映射 (homography)。特别地, 当 $\Sigma = \Sigma'$ 时, 称射影映射为射影变换 (projective transformation)。

由定义, 设 Σ 和 Σ' 是空间中的两张不同的平面, 则过两平面外一点 O 的中心投影 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 是一个射影映射。

命题 14.2. 设 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 是射影映射, 则 $\phi^{-1}: P(\Sigma') \rightarrow P(\Sigma)$ 也是射影映射。

证明. 设 A', B', C' 是射影平面 $P(\Sigma')$ 中直线 ℓ' 上三点, 设 $A = \phi^{-1}(A'), B = \phi^{-1}(B'), C = \phi^{-1}(C')$ 。若 A, B, C 不共线, 如图30所示, 则 A, B, C 中至少有一点不是无穷远点, 不妨设 A

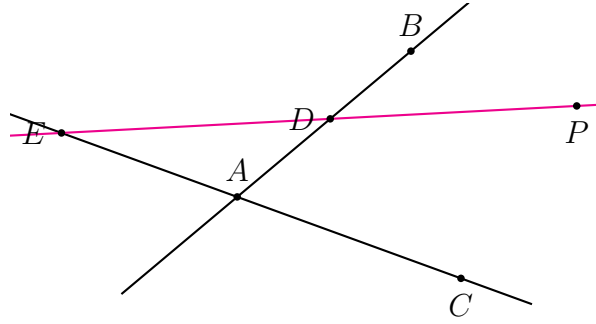


图 30: 射影映射的逆映射

不是无穷远点。对 Σ 中任何点 P , 若 P 在直线 AB 或 AC 上, 则因 ϕ 是射影映射, 把直线映为直线, 故 $\phi(P)$ 在 $\phi(A), \phi(B)$ 或 $\phi(A), \phi(C)$ 所决定的直线 ℓ' 上。若 P 不在直线 AB 或 AC 上, 取过 P 的直线 ℓ_1 , 不与直线 AB 或 AC 平行, 并且交点 $\ell_1 \cap AB = D, \ell_1 \cap AC = E$ 均不等于 A , 则 $\phi(D)$ 及 $\phi(E)$ 均在直线 ℓ' 上, 从而 $\phi(P)$ 也在直线 ℓ' 上。由 P 的任意性, ϕ 将 $P(\Sigma)$ 映入 ℓ' 中, 与 ϕ 是一一对应矛盾。□

射影平面 $P(\Sigma)$ 上的所有射影变换构成一个群, 称为 $P(\Sigma)$ 上的射影变换群 (projective transformation group), 记为 $\text{Proj}(P(\Sigma))$ 。

设 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 是仿射映射, 则 ϕ 将 Σ 上的每条直线 ℓ 映为 Σ' 中的某条直线 ℓ' 。补充定义

$$\phi(\infty(\ell)) = \infty(\ell')$$

因仿射变换 ϕ 将与 ℓ 平行的直线映为与 ℓ' 平行的直线, 故定义是良定的, 即与 $\infty(\ell)$ 的代表元的选取无关。于是, 每个仿射映射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 可以唯一地扩充为射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 。

反之, 设射影映射 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 将无穷远直线 ℓ_∞ 映为无穷远直线 ℓ'_∞ 。因 ϕ^{-1} 也是射影映射, 将 ℓ'_∞ 映为直线 ℓ_∞ 。故 ϕ 是 Σ 到 Σ' 的双射, 并将直线映为直线, 故 ϕ 在 Σ 上的限制 $\phi|_\Sigma$ 是 Σ 到 Σ' 的仿射映射, 而 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 是仿射映射 $\phi|_\Sigma$ 的扩充。

当 $\Sigma = \Sigma'$ 时, $\text{Aff}(\Sigma)$ 自然地同构于 $\text{Proj}(P(\Sigma))$ 的子群

$$\mathcal{A}_2 = \{\phi \in \text{Proj}(P(\Sigma)) \mid \phi(\ell_\infty) = \ell_\infty\} \quad (14.1)$$

$\mathcal{A}_2$ 称为 Σ 上射影变换群 $P(\Sigma)$ 的仿射子群。 $\mathcal{A}_2$ 中的射影变换称为 $P(\Sigma)$ 上的仿射变换。

命题 14.3. 设 ℓ 是射影平面 $P(\Sigma)$ 的一条直线，则存在射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ ，它将直线 ℓ 映为无穷远直线 ℓ_∞ 。

证明. 如图26所示，取平面 Σ' ，使得 Σ' 与 Σ 的相交直线与 ℓ 平行但不相等。取平面 Σ 和 Σ' 外的点 O ，使得过 O 与 ℓ 的平面与 Σ' 平行。则以 O 为中心的中心投影 $\phi_1: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma')$ 将直线 ℓ 映为射影平面 $P(\Sigma')$ 的无穷远直线 ℓ'_∞ 。取仿射映射 $\phi_2: P(\Sigma') \rightarrow P(\Sigma)$ ，则 ϕ_2 将 $P(\Sigma')$ 的无穷远直线 ℓ'_∞ 映为 $P(\Sigma)$ 的无穷远直线 ℓ_∞ 。则射影变换 $\phi = \phi_2 \circ \phi_1: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 将直线 ℓ 映为无穷远直线 ℓ_∞ 。□

给定 $P(\Sigma)$ 中的直线 ℓ ， $P(\Sigma) \setminus \ell$ 上不相交的直线称为平行的。故直线的补集都是仿射平面。

14.2 对偶原理

设 $P(\Sigma)$ 是一个射影平面，记 $P^*(\Sigma)$ 为 $P(\Sigma)$ 上所有的直线构成的集合。取定平面 Σ 外一点 O ，定义 $P(\Sigma) \rightarrow P^*(\Sigma)$ 如下：对 $A \in P(\Sigma)$ ，记过 O 点且垂直于 OA 的平面与平面 Σ 相交的直线为 $A^* \in P^*(\Sigma)$ ，称映射 $A \mapsto A^*$ 为射影平面的对偶对应。

射影平面上点和直线的地位是对称的，设 $\varphi(\text{点}, \text{线})$ 是射影平面上关于点和线的命题，如果改写为 $\varphi(\text{线}, \text{点})$ ，称为原命题 $\varphi(\text{点}, \text{线})$ 的对偶命题。对偶字典如下

$\mathbb{RP}^2$ 中的点	$\mathbb{RP}^2$ 中的直线
共点的线	共线的点

命题 14.4 (射影平面上的对偶原理). 射影平面上，如果一个命题 $\varphi(\text{点}, \text{线})$ 可以证明是一条定理，则其对偶命题 $\varphi(\text{线}, \text{点})$ 也可以证明是一条定理。

定理 14.5 (Desargues 对偶定理). 如图31，若三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应边之交点必共

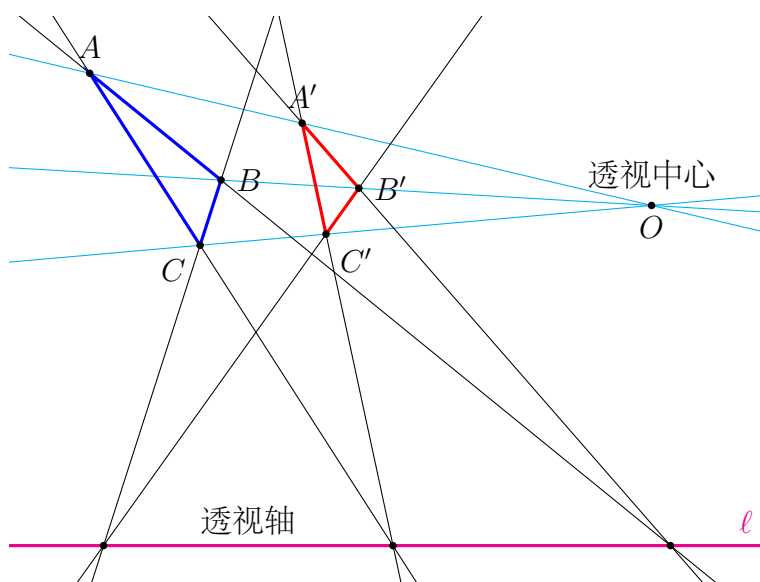


图 31: Desargues 对偶定理

线于直线 ℓ ，则其对应顶点连线共点于某点 O 。

定理 14.6 (Pappus 对偶定理). 如图32，设直线 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共点于 G ，直线 $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$ 共点于 G ，设直线 ℓ_2, ℓ'_3 交于 A ， ℓ'_2, ℓ_3 交于 A' ， ℓ_1, ℓ'_3 交于 B ， ℓ'_1, ℓ_3 交于 B' ， ℓ_1, ℓ'_2 交于 C ， ℓ'_1, ℓ_2 交于 C' 。则直线 AA', BB', CC' 共点。

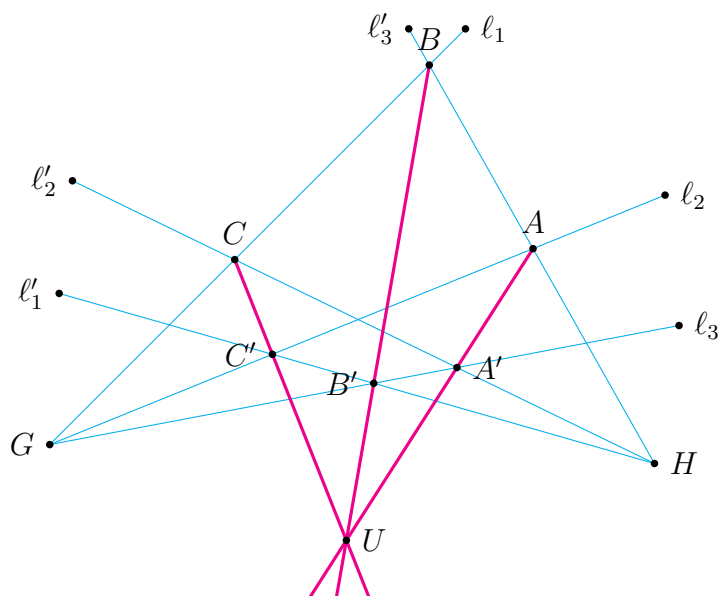


图 32: Pappus 对偶定理

在球面 S^2 的对径点模型中，对偶原理相应于对径点到与该直径垂直的大圆的一一对应。在线把模型上，本质上，对偶原理是 $V \cong V^*$ 诱导 $P(V) \cong P(V^*)$ 。利用 $\mathbb{E}^3$ 的典范内积，可以写出

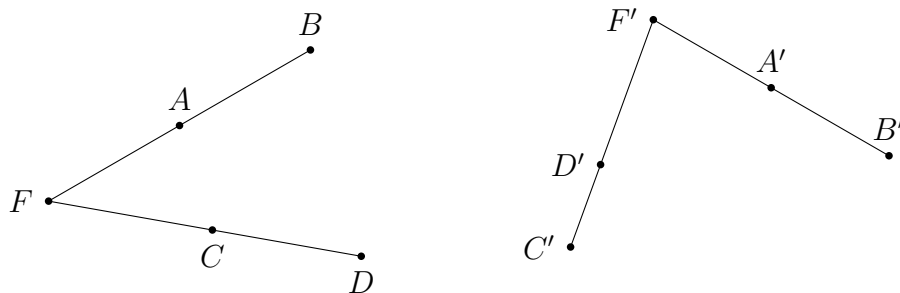
$$L \longleftrightarrow L^\perp$$

L 对应于 $P(V)$ 中的点，而 $L^\perp$ 对应于 $P(V)$ 中的直线。

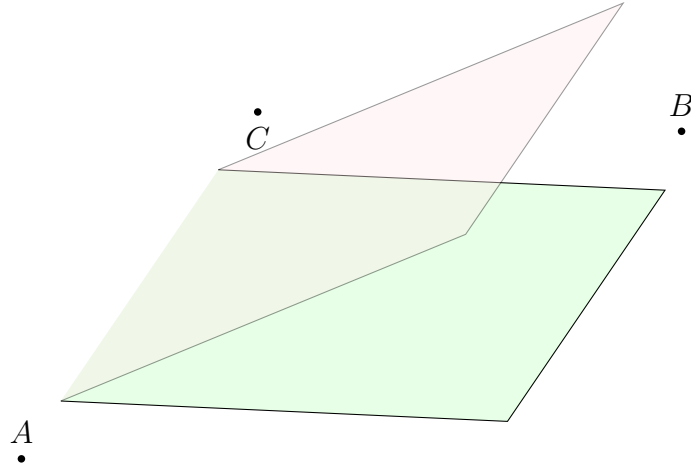
14.3 仿射变换由四点决定

设射影平面 $P(\Sigma)$ 中四点 A, B, C, D 中任何三点不共线，四点 A', B', C', D' 中任何三点不共线，则存在射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 将 A, B, C, D 分别映为 A', B', C', D' 。

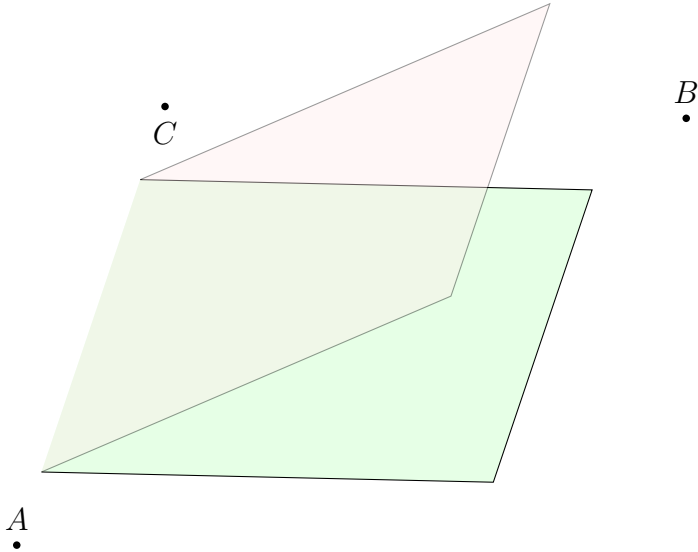
设直线 AB 交 CD 于 F ， $A'B'$ 交 $C'D'$ 于 F' ，并且通过射影变换，可设所有点属于 Σ ，如下图所示



通过射影映射，可设 $F = F'$ ， $A, B, C, D \in \Sigma$ ， $A', B', C', D' \in \Sigma'$ ，则 F, A, B, A', B' 共面，设 AA' 与 BB' 交于点 P ，则 P 点为中心的中心投影将 A, B, F 映为 A', B', F' ，如下图所示



通过绕直线 ABF 旋转，设 $A, B, C, D \in \Sigma$, $A', B', C', D' \in \Sigma''$ ，设 CC' 与 DD' 交于点 Q ，则 Q 点为中心的中心投影将 C, D 映为 C', D' ，并且保持 A, B, F 不动，如下图所示



以下设平面 $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ ，点 $O \in \mathbb{E}^3 \setminus \Sigma$ 。记 $\text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$ 为所有保持 O 不动的空间仿射变换构成的变换群。 $\Phi \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$ 诱导向量变换 $\Phi_* \in GL(\mathbb{V}(\mathbb{E}^3))$ ，事实上， $\Phi \mapsto \Phi_*$ 是一一对应，并由下面公式刻画

$$\Phi_* \left(\overrightarrow{OP} \right) = \overrightarrow{O\Phi(P)}.$$

$\Phi_* \in GL(\mathbb{V}(\mathbb{E}^3))$ 进而诱导映射（仍记为 Φ_* ）

$$\Phi_* : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2, \quad \Phi_*([v]) = [\Phi_*(v)]$$

Φ_* 是一一对应，并且对任何实数 λ ，有

$$(\lambda\Phi)_* = \Phi_* : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$$

回顾 $\sigma : P(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ 定义为

$$\sigma(x) = \begin{cases} \text{过 } O \text{ 与 } x \text{ 的直线,} & \text{若 } x \in P(\Sigma) \setminus \ell_\infty, \\ \text{过 } O \text{ 与 } \ell \text{ 平行的直线,} & \text{若 } x = \infty(\ell) \in \ell_\infty. \end{cases}$$

其逆映射为 $\sigma^{-1} : \mathbb{R}P^2 \rightarrow P(\Sigma)$ 为

$$\sigma^{-1}([\ell]) = \begin{cases} \ell \cap \Sigma, & \text{若直线 } \ell \in \mathbb{R}P^2 \text{ 与 } \Sigma \text{ 相交,} \\ \Sigma \text{ 中与 } \ell \text{ 平行的直线 } \ell' \text{ 对应的无穷远点 } \infty(\ell'), & \text{若直线 } \ell \in \mathbb{R}P^2 \text{ 与 } \Sigma \text{ 平行.} \end{cases}$$

命题 14.7. 对 $\forall \Phi \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma$ 是射影变换。

证明. 因 $\sigma : P(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ 及 $\Phi_* : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ 均为一一对应, 故 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma$ 是一一对应。

设 A, B, C 是 $P(\Sigma)$ 中共线三点, 属于直线 ℓ 。设 $\sigma(A) = [\mathbf{u}]$, $\sigma(B) = [\mathbf{v}]$, $\sigma(C) = [\mathbf{w}]$, 则

$$\phi(A) = \sigma^{-1}(\Phi_*([\mathbf{u}])), \phi(B) = \sigma^{-1}(\Phi_*([\mathbf{v}])), \phi(C) = \sigma^{-1}(\Phi_*([\mathbf{w}])).$$

1. 若 ℓ 不是无穷远直线 ℓ_∞ , 则无论 A, B, C 中是否有无穷远点, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 平行于过 O 与 ℓ 的平面, 即 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 线性相关, 故 $\Phi_*(\mathbf{u}), \Phi_*(\mathbf{v}), \Phi_*(\mathbf{w})$ 线性相关。设过 O 点且平行于 $\Phi_*(\mathbf{u}), \Phi_*(\mathbf{v}), \Phi_*(\mathbf{w})$ 的平面为 Σ' 。若 Σ' 与 Σ 相交, 则 $\phi(A), \phi(B), \phi(C)$ 属于直线 $\Sigma \cap \Sigma'$ 。若 Σ' 与 Σ 平行, 则 $\phi(A), \phi(B), \phi(C)$ 属于无穷远直线 ℓ_∞ 。
2. 若 $\ell = \ell_\infty$, 则 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 均平行于过的平面 Σ , 故 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 线性相关。类似可得 $\phi(A), \phi(B), \phi(C)$ 共线。

故 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma$ 是射影变换。 $\square$

命题 14.8. 任给仿射变换 $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, 存在唯一的仿射变换 $\Phi \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 使得 $\Phi(\Sigma) = \Sigma$, 并且 $\Phi|_\Sigma = \phi$, 于是有

$$\sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma = \phi : P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma) \quad (14.2)$$

证明. 任取 $A \in \Sigma$ 。对任何 $P \in \mathbb{E}^3$, 有唯一分解

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, B \in \Sigma.$$

令 $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 定义为

$$\overrightarrow{O\Phi(P)} = \lambda \overrightarrow{O\phi(A)} + \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} \quad (14.3)$$

不难验证 Φ 的定义(14.3)不依赖于 A 点的选取, 并且 $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是仿射变换。

反之, 若仿射变换 $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 使得 $\Phi(\Sigma) = \Sigma$ 且 $\Phi|_\Sigma = \phi$, 则 Φ 满足(14.3), 故唯一。 $\square$

命题 14.9. 设 ℓ 是射影平面 $P(\Sigma)$ 上的一条直线, 则存在 $\Phi \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 使得 $\phi := \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma : P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 将直线 ℓ 变为无穷远直线 ℓ_∞ 。

证明. 若 $\ell = \ell_\infty$, 取 $\Phi = 1$ 即可, 故下设 ℓ 不是无穷远直线 ℓ_∞ 。

任取两不同点 $A_1, A_2 \in \ell$ 及两不同无穷远点 $\infty(\ell_1), \infty(\ell_2) \in \ell_\infty$, 设

$$\sigma(A_1) = [\mathbf{u}_1], \quad \sigma(A_2) = [\mathbf{u}_2], \quad \sigma(\infty(\ell_1)) = [\mathbf{v}_1], \quad \sigma(\infty(\ell_2)) = [\mathbf{v}_2].$$

则 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\}$ 是 $\mathbb{E}^3$ 的两组基, 故存在 $\Phi \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 使得

$$\Phi_*(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1, \quad \Phi_*(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2, \quad \Phi_*(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

则射影变换 $\phi := \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma : P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$ 满足

$$\phi(A_1) = \infty(\ell_1), \quad \phi(A_2) = \infty(\ell_2).$$

因射影变换将直线映为直线, 故 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma$ 将 A_1, A_2 所在的直线 ℓ 映为 $\infty(\ell_1), \infty(\ell_2)$ 所在的无穷远直线 ℓ_∞ 。 $\square$

定理 14.10. 任给射影变换 $\phi: P(\Sigma) \rightarrow P(\Sigma)$, 存在唯一的 (除一个非零因子外) $\Phi \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 使得 $\phi = \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma$.

证明. 设 $\phi(\ell_\infty) = \ell$, 则由命题14.9, 存在 $\Phi_1 \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 使得射影变换 $\phi_1 := \sigma^{-1} \circ (\Phi_1)_* \circ \sigma$ 将 ℓ 映为 ℓ_∞ . 则射影变换 $\phi_1 \circ \phi$ 将 ℓ_∞ 映为 ℓ_∞ , 从而 $(\phi_1 \circ \phi)|_\Sigma$ 是 Σ 上的仿射变换。由命题14.8, 存在 $\Phi_2 \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 使得

$$\phi_1 \circ \phi = \sigma^{-1} \circ (\Phi_2)_* \circ \sigma$$

令 $\Phi = \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 \in \text{Aff}_{\mathbb{E}^3}(O)$, 则有

$$\phi = \sigma^{-1} \circ (\Phi_1^{-1})_* \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ (\Phi_2)_* \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ (\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2)_* \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \Phi_* \circ \sigma$$

存在性得证。唯一性可参照定理14.12的证明。 $\square$

定理14.10给出射影变换群 $\text{Proj}(P(\Sigma))$ 的如下刻画

$$\text{Proj}(P(\Sigma)) \cong PGL(3) := GL(3) / (T \sim \lambda T : \lambda \in \mathbb{R}^*). \quad (14.4)$$

定义 14.11. 射影平面中四个点 A, B, C, D 若其中任何三点不共线, 则称它们处于一般位置 (general position)。

定理 14.12. 给定射影平面 $P(\Sigma)$ 上任意两组处于一般位置的四点 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 和 $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, 则存在唯一的射影变换 ϕ , 使得

$$\phi(A_i) = B_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

证明. 设 $\sigma^{-1}(A_i) = [\mathbf{v}_i]$, 则 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 处于一般位置意味着 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 不共面, 从而构成向量空间 $\mathbb{V}(\mathbb{E}^3)$ 的一组基, 故存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, 使得

$$\mathbf{v}_4 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

所有 λ_i 非零: 若某个 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\mathbf{v}_4$ 与另外两个对应的向量共面, 与 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 处于一般位置矛盾。用 $\lambda_i \mathbf{v}_i$ 取代 $\mathbf{v}_i$, 则有

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

由一般位置的假设, $\mathbf{v}_4$ 的上述分解是唯一的。

类似的, 可设 $\sigma^{-1}(B_i) = [\mathbf{w}_i]$, 使得

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$$

其中 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 是向量空间 $\mathbb{V}(\mathbb{E}^3)$ 的一组基。

于是, 存在仿射变换 $T \in GL(3)$, 使得 $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, 2, 3$ 。由 T 的线性性质, 可知

$$T(\mathbf{v}_4) = \mathbf{w}_4$$

于是对射影变换 $\tau = \sigma^{-1} \circ T \circ \sigma$, 有

$$\tau(A_i) = B_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

若另有 $S \in GL(3)$, 使得 $\sigma^{-1} \circ S \circ \sigma$ 将 A_i 映为 B_i , 则存在 $\mu_i \in \mathbb{R}_0, i = 1, 2, 3, 4$, 使得

$$S(\mathbf{v}_i) = \mu_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

于是有

$$\mu_4 \mathbf{w}_4 = S(\mathbf{v}_4) = S(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mu_1 \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{w}_2 + \mu_3 \mathbf{w}_3$$

故

$$\mathbf{w}_4 = \frac{\mu_1}{\mu_4} \mathbf{w}_1 + \frac{\mu_2}{\mu_4} \mathbf{w}_2 + \frac{\mu_3}{\mu_4} \mathbf{w}_3$$

由 $\mathbf{w}_4$ 在基 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 表示的唯一性, 可知 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ 。故 $S = \mu_1 T$, $\sigma^{-1} \circ S \circ \sigma = \tau$ 。□

推论 14.13. 射影变换由一般位置四点的像唯一决定, 并且是 4 传递的。

各种几何的变换和不变量如下图所示

	欧氏几何 Euclidean	相似几何 Similarity	仿射几何 Affine	射影几何 Projective
变换 Transformation				
旋转 rotation	X	X	X	X
平移 translation	X	X	X	X
整体压缩 uniform scaling		X	X	X
压缩 nonuniform scaling			X	X
错切 shear			X	X
中心投影 perspective projection				X
投影的复合 composition of projections				X
不变量 Invariants				
长度 length	X			
角度 angle	X	X		
长度比值 ratio of lengths	X	X		
平行 parallelism	X	X	X	
简单比 ratio	X	X	X	
共点或共线 incidence	X	X	X	X
分比 cross ratio	X	X	X	X

各种几何可以如图33所示

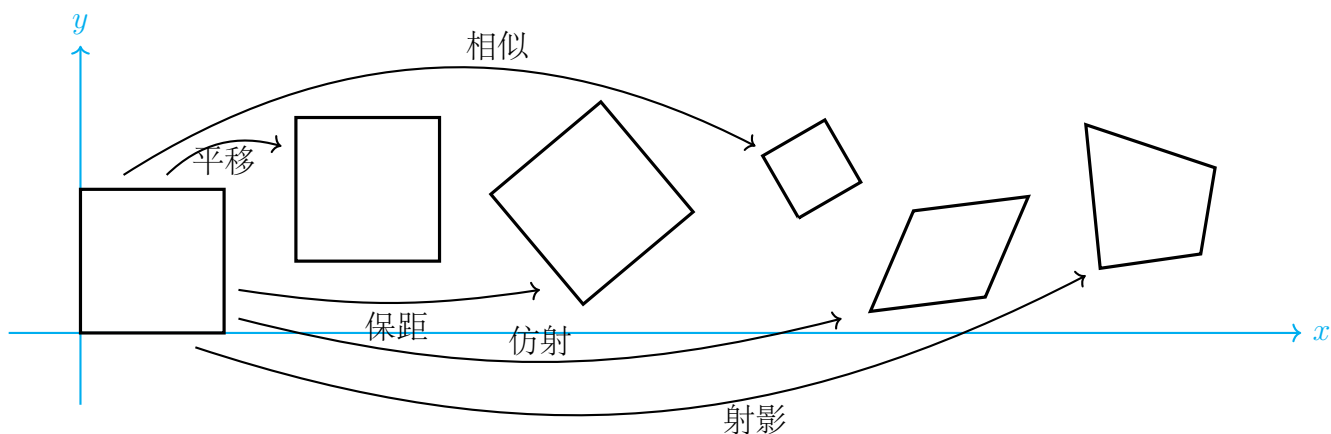


图 33: 几何变换