同伦论, 2019 年春季

作业 2

上交时间：6 月 3 日

1. 设 X 与 Y 是道路连通的 CW 复形，设映射 $f: X \to Y$ 诱导了基本群的同构，并且 f 在万有复迭上的某个提升 $\widetilde{f}: \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ 诱导了同调上的同构，证明 f 是一个同伦等价。

2. 设 X 与 Y 均为 n 维的 CW 复形，$f: X \to Y$ 对 $i \leqslant n$ 诱导了 π_i 上的同构，证明 f 是一个同伦等价。

3. 对 $n \geqslant 2$，计算 $\pi_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{PP}^{n-1})$。说明商映射 $(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}) \to \mathbb{RP}^n / \mathbb{RP}^{n-1}$ 不诱导同伦群的等价。

4. 设 X 是拓扑空间，Y 是 CW 复形，映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 满足 $g \circ f$ 同伦于 X 上的恒同映射。证明 X 与某个 CW 复形同伦等价。

5. 对 $n > k > 0$，证明不存在从 $\mathbb{RP}^n$ 到 $\mathbb{RP}^k$ 的收缩映射。

6. 设 X 是 $(n-1)$-连通的 CW 复形，证明
   (a) 若 $n > 1$，则 $h: \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ 是满同态；
   (b) 若 $n = 1$，则有同构
   $$\frac{H_2(X)}{h(\pi_2(X))} \cong H_2(K(\pi_1(X), 1))$$

7. 证明 Stiefel 流形和 Grassmann 流形都是光滑流形。

8. 证明：基本群为 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的空间具有不平凡的二维同调群。

9. 设 $n > 1$，G 为交换群，证明 $H_{n+1}(K(G, n); \mathbb{Z}) = 0$。

10. 设 $n > 1$，X 是 CW 复形，满足
    $$\pi_i(X) = 0, \qquad \forall 1 < i < n$$
    设 $h: \pi_n(X) \to H_n(X)$ 为 Hurewicz 同态，证明：
    $$\frac{H_n(X)}{h(\pi_n(X))} \cong H_n(K(\pi_1(X), 1))$$