

高等数学 A, 2021 年秋季

作业 9

上交时间及方式: 2021.12.14 习题课

目标: 函数的凸凹性、渐近线, 函数作图与方程求根。

1. 设函数 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的凸函数, 求证:

(a) 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, 左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在, 从而 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

(b) 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$

(c) 左导函数 $f'_-(x)$ 和右导函数 $f'_+(x)$ 在 (a, b) 内单调上升。

2. 设函数 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的凸函数, 求证: 对 $\forall x_0 \in (a, b)$, 存在 $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$, 使得

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b)$$

3. 作下列函数的图形

$$(a) y = \sin^3 x + \cos^3 x, \quad (b) y = \sqrt[3]{xe^{-x}}$$

4. 对常数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 求方程

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{3\sqrt{3}}{\cos x} = \lambda$$

在区间 $[0, 2\pi]$ 上的实根个数。

5. 用牛顿法求方程 $x^3 - 2 = 0$ 的正根。已知 $x_1 = 2$, 迭代 6 次, 计算到 x_6 。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 上可导, $f(x_0) = 0$, 并存在常数 α , 使得

$$q = \sup_{|x-x_0|<\delta} |1 - \alpha f'(x)| < 1$$

求证: 对任意 $x_1 \in U(x_0, \delta)$, 由公式 $x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n)$ 确定的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0 。

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且为凸函数, 满足

$$f(x) = x^2 + x^2 \cdot \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

求证:

(a) 对 $\forall h \in (0, \frac{x}{2})$, 有 $\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \leq f'(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 。

(b) 对 $\forall \eta > 0$, 存在 $M > 0$, 使当 $x > M$ 时, 对 $\forall h \in (0, \frac{x}{2})$ 有

$$2x - h - \frac{\eta}{h}x^2 \leq f'(x) \leq 2x + h + \frac{\eta}{h}x^2$$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 1$ 。

(d) 若 $f(x)$ 可导, 但不是凸函数, 那么由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 能否得出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 1$?

8. 对自然数 $n \in \mathbb{R}$, 给定方程 $x^n + x = 1$, 求证:

(a) 在 $x > 0$ 上方程有唯一解 x_n 。

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ 。

(c) 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $1 - x_n \sim \frac{\ln n}{n}$ 。