

高等数学 A, 2021 年秋季

作业 8

上交时间及方式: 2021.12.07 习题课

目标: 泰勒公式、函数的单调性与极值

1. 写出下列函数在 $x = 0$ 的泰勒公式至指定的阶数

$$(a) \ln(\cos x + \sin x) \quad (x^4) \quad (b) \frac{x}{2x^2 + x - 1} \quad (x^4)$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 上有 $(n-1)$ 阶导数, 在 x_0 处有 n 阶导数, 并且

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

求证: 当 $0 < |h| < \delta$ 时, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h) \quad \text{且} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n-1\sqrt{n}}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 并且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二次可导, 且对 $\forall x > 0$ 有

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f''(x)| \leq M_2$$

求证: 对 $\forall x > 0$, 有

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

并举例说明上述不等式无法改进。

5. 求证下列不等式

$$(a) \sin x + \cos x > 1 + x - x^2 \quad (x > 0) \quad (b) \ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geq 0)$$

6. 求证: 方程 $f(x) = (\frac{2}{\pi} - 1) \ln x - \ln 2 + \ln(1+x^2) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有且只有一个实根。

7. 设 $u > e$, 设 $x(u)$ 是方程 $x \ln x = u$ 的根

(a) 求证: $x(u) \sim \frac{u}{\ln u} \quad (u \rightarrow +\infty)$

(b) 求 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x > 1$ 上的最大值。

(c) 求证: $\frac{u}{\ln u} \leq x(u) \leq \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{u}{\ln u}$ 。

8. 设

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

求证:

(a) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大点。

(b) 在 $x = 0$ 的任意小邻域内, $f(x)$ 在 $x = 0$ 的右侧不单调下降, 在 $x = 0$ 左侧不单调上升。