

高等数学 A, 2021 年秋季

作业 7

上交时间及方式: 2021.11.30 习题课

1. 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0$, 求证: 方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

在 $(0, 1)$ 间至少有一个根。

2. 求证: 勒让德多项式

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

在 $[-1, 1]$ 内有 n 个零点。

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $f'(x)$ 单调, 求证: $f'(x)$ 在 (a, b) 上连续。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足李普希兹条件

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b], k \text{ 为常数}$$

的充要条件是函数 $e^{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 上满足李普希兹条件

$$|e^{f(x)} - e^{f(y)}| \leq k'|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b], k' \text{ 为常数}$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($a > 0$), 在 (a, b) 上可微, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 求证:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = \ell$$

这里 $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 。求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

8. 求极限

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1+x^a}{1+x^b} \right)^{\frac{1}{\ln x}} & \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{x}} \\ (c) \lim_{x \rightarrow 0} x \left(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}} \right) & \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x} \end{aligned}$$