高等数学 A, 2021 年秋季

作业 4

上交时间及方式：2021.11.9 习题课

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上定义，并且在每一有限区间 (a,b) 上有界，如果
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$$
求证
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

2. 适当选取 α，使得函数
$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ \alpha+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$
在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，并证明其连续性。

3. 求证：
   (a) 方程 $x^3+x+1=0$ 有实根。
   (b) 方程 $\tan x-x=0$ 有无穷多个实根。

4. 设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，并且是一一对应，求证：
   (a) 若 $f(a)<f(b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递增。
   (b) 若 $f(a)>f(b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调递减。

5. 设函数 $f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数，存在序列 $\{a_n\},\{b_n\}\subset(a,b)$，满足
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=b,\qquad \lim_{n\to+\infty}f(a_n)=\alpha,\qquad \lim_{n\to+\infty}f(b_n)=\beta$$
如果 $\alpha<\beta$，求证：对 $\forall\eta\in(\alpha,\beta)$，存在数列 $\{c_n\}\subset(a,b)$，使得
$$\lim_{n\to+\infty}c_n=b,\qquad \lim_{n\to+\infty}f(c_n)=\eta$$

6. 是否存在从如下区间到 $\mathbb{R}$ 的连续满函数？如果存在请构造例子，如果不存在，请证明
   (a) $(0,1)$
   (b) $[0,1]$
   (c) $(0,1]$

7. 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续的周期函数，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

8. 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，并且 $f(x)>0,\forall x\in[0,1]$，令
$$M(x)=\max_{0\leqslant t\leqslant x}f(t),\qquad x\in[0,1]$$
求证：函数 $Q(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{M(x)}\right]^n$ 在 $[0,1]$ 上连续的充要条件是 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的单调递增函数。

9. 求极限
$$\lim_{x\to0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，并且
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$$
求证：$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

11. 设函数 $f(x) \in \mathcal{C}(0,+\infty)$，满足对 $\forall\, x_0 \in (0,+\infty)$，有

$$\lim_{n\to+\infty} f(nx_0) = 0$$

求证：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，满足

$$f(a) > a, \quad f(b) < b$$

求证：f 在 $[a,b]$ 上有不动点，即存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$。