高等数学 A, 2021 年秋季

作业 3

上交时间及方式：2021.11.02 习题课

1. 求下列序列的极限
$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$$

2. 求下列极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

3. 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

4. 设序列 $\{a_n\}$ 满足下列条件
$$0<a_n<1, \quad (1-a_n)a_{n+1}>\frac{1}{4}$$
求证序列 $\{a_n\}$ 单调上升，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$。

5. 设 $0<\lambda<1$，序列 $\{a_n\}$ 收敛于 α，求证
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0\right)=\frac{\alpha}{1-\lambda}$$

6. 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$$

7. 证明如下序列收敛
$$a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

8. 设正实数序列 $\{a_n\}$ 满足
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1$$
证明序列 $\{a_n\}$ 收敛。

9. 证明序列
$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{7-\sqrt{7}}, \quad \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \quad \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}, \cdots$$
收敛，并且求其极限。

10. 用肯定的语气叙述
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\neq+\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)\text{不存在有限极限}$$

11. 用极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$。

12. 求下列极限
$$\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt[3]{t}-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}+1}$$

13. 求下列极限
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\ (m,n\text{为整数}, n\neq 0), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(n\arccos x)}{x}\ (n\text{为奇数})$$

14. 求极限
$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$