

高等数学 A, 2021 年秋季

作业 2

上交时间及方式: 2021.10.26 习题课

1. 设 $f(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x < 1$)。
 - (a) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-1, 1)$ 上, 使其成为偶函数;
 - (b) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 使其成为周期为 2 的奇函数。
2. 用肯定语气叙述: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上,
 - (a) $f(x)$ 不是奇函数;
 - (b) $f(x)$ 不是周期函数;
 - (c) $f(x)$ 不是单调上升函数;
 - (d) $f(x)$ 不是单调函数。
3. 若 $f(x)$ 在实轴上定义, 且 $f(f(x)) \equiv x$ 。
 - (a) 这样的函数 $f(x)$ 有几个? 描述一下这种函数。
 - (b) 如果 $f(x)$ 在实轴上严格上升, 这种函数有几个?
4. 用 $\varepsilon - N$ 方法验证
 - (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^3 + 2} = 0$;
 - (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$;
 - (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 q^n = 0$ ($|q| < 1$);
 - (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n!} = 0$;
5. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$ 。
6. 满足下面条件的序列 $\{x_n\}$ 各有什么性质?
 - (a) $\forall N > 0, \exists \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$;
 - (b) $\exists N > 0, \forall \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 。
7. 证明 $\{\cos n\}$ 的极限不存在。
8. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$$

9. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}} \quad (a > 0)$$

10. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

证明序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛且其极限相等。