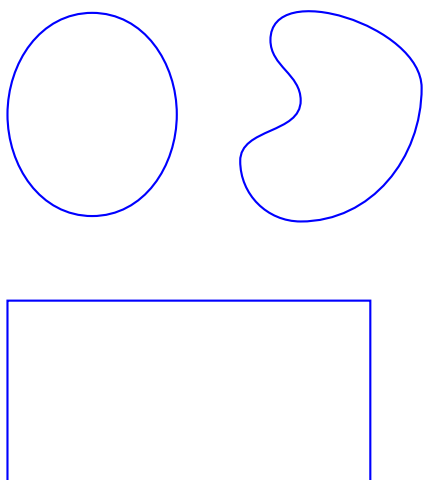


20 Jordan 曲线定理

流形 M 中的一条简单闭曲线是指单位圆周在 M 中的一个嵌入。这里的“简单”是指没有自交点，“闭”是指它是一个环路。平面中的简单闭曲线通常称为 *Jordan 曲线*。



Jordan 曲线



非 Jordan 曲线

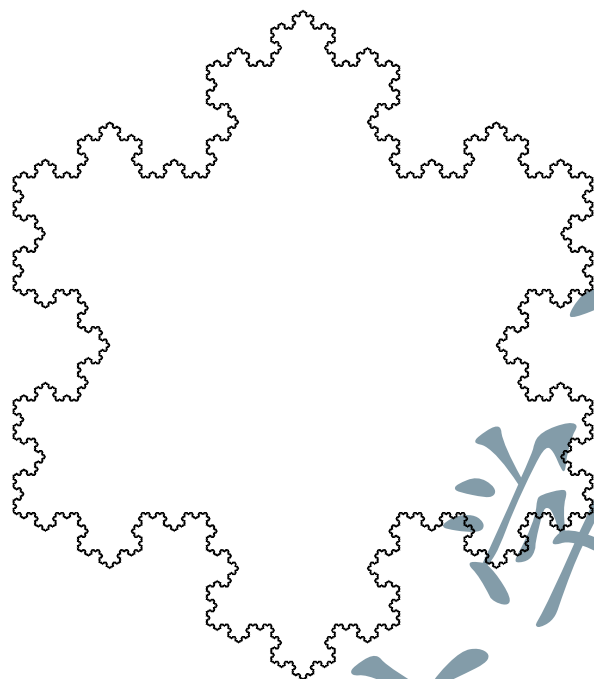
定理 20.1 (Jordan 曲线定理). 平面中的一条 *Jordan 曲线* J 将平面分为两个连通分支，每一个连通分支都以 J 为边界。

Jordan 曲线定理首先由 Camille Jordan (1838–1922) 在他的 *Cours d'Analyse* 提及。但定理的证明并不容易。Jordan 自己给出的证明非常复杂但不正确。证明的困难在于“简单闭曲线”的概念的一般性，不限于多边形的边界或者“光滑”曲线，而是包括圆周的所有拓扑像集。同时，如“内部”和“外部”的概念，虽然直观上是清楚的，必须有准确的定义，然后 Jordan 曲线定理才有可能有严格的证明。第一个严格的证明是由 Veblen [Veb05] 给出的。

关于 Jordan 曲线定理有如下一些明显的事实：

1. $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 是 $\mathbb{E}^2$ 中的开集，从而是无边界的曲面。 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 是局部道路连通的，也就是说，每点有道路连通的邻域。所以 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 的连通分支都是道路连通分支，并且是开子集。
2. $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 有唯一的无界的连通分支。
3. 如果我们把 $\mathbb{E}^2$ 换作 S^2 ，定理仍然成立。

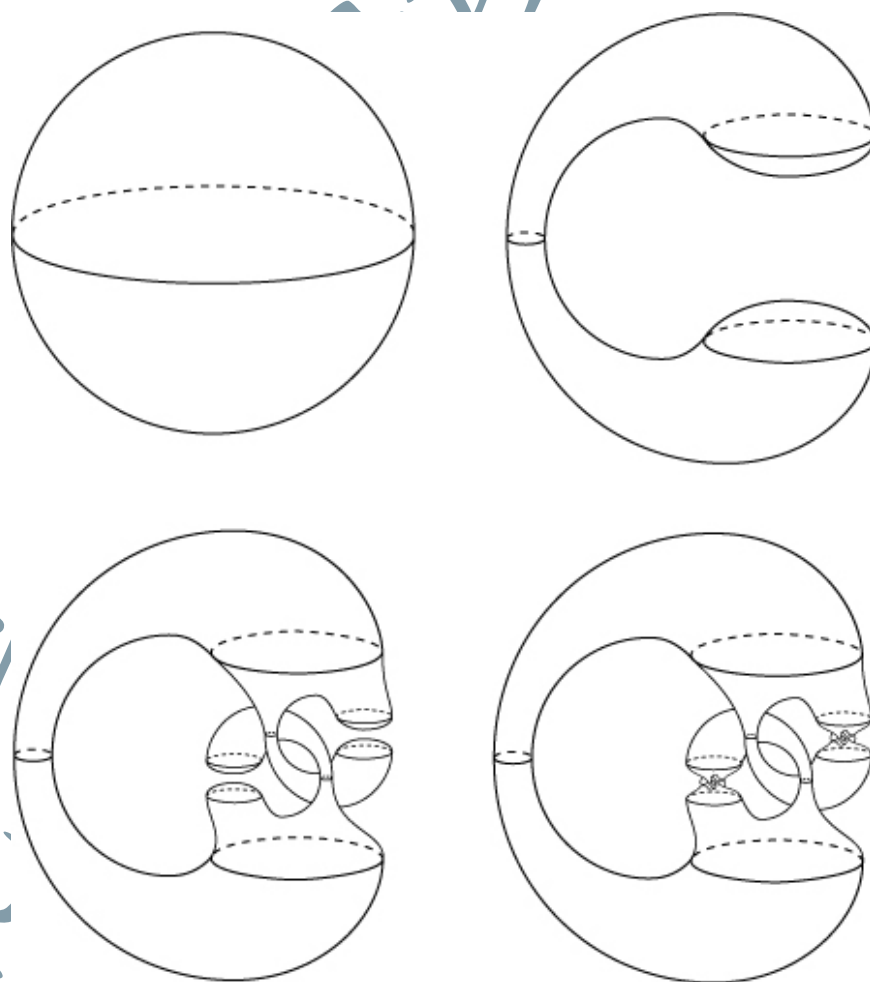
Jordan 曲线定理的证明并不容易，如下的 Jordan 曲线是不可求长的



Jordan 曲线定理可以增强为如下的

定理 20.2 (Schnflies). 平面中的一条 *Jordan* 曲线 J 将平面分为两个连通分支，其中一个分支的闭包同胚于 D^2 。

在三维里的相应定理并不正确。如下的 Alexander 角球是一个范例。



练习 20.3. 证明实心 Alexander 角球的补空间不是单连通的。

证明.

20.1 折线情形的 Jordan 闭曲线定理

首先我们证明当 J 是折线情形的证明。

命题 20.4 (折线情形的 Jordan 曲线定理). 如果 J 是平面中的简单闭折线, 则 J 将平面分为两个连通分支, 每个连通分支以 J 为边界。

练习 20.5. 对于 (一般情形的) Jordan 曲线 J , 如果存在道路连接 $p, q \in \mathbb{E}^2 \setminus J$, 则存在 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 中的 (有限) 折线连接他们。

证明. 设 $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2 \setminus J$ 连接 p 与 q , 则 $d_0 = d(J, \alpha[0, 1]) > 0$. 由 Lebesgue 引理, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得对任意整数 $0 \leq i < n$, 有 $\text{diam} \left\{ \alpha \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right) \right\} < \frac{d_0}{2}$. 则折线

$$p = \alpha(0) - \alpha\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha\left(\frac{2}{n}\right) - \cdots - \alpha\left(\frac{n-1}{n}\right) - \alpha(1) = q$$

连接 p 到 q . 对任意 $t \in [0, 1]$, 设 $t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$, 对任意 $x \in J$, 有

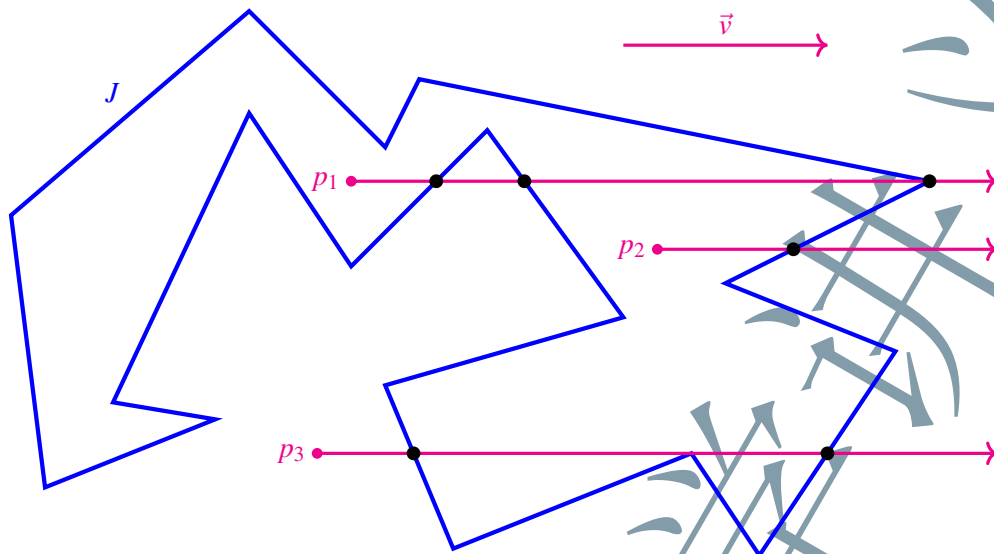
$$d(\alpha(t), x) \geq d(\alpha(i/n), x) - d(\alpha(i/n), \alpha(t)) > d_0 - \frac{d_0}{2} = \frac{d_0}{2}$$

取下确界, 有 $d(\alpha(t), J) \geq \frac{d_0}{2} > 0$. 所以 $\alpha([0, 1]) \cap J = \emptyset$, 即 $\alpha([0, 1]) \subset \mathbb{E}^2 \setminus J$.

证明. P 的的线段称为边, 线段的端点称为顶点. 因为只有有限多条边, 我们可以取与所有边都不平行的向量 $\vec{v}$. 对任意 $x \in \mathbb{E}^2 \setminus J$, 考虑从 x 点沿 $\vec{v}$ 方向的射线

$$\ell_x = \{x + t\vec{v} \in \mathbb{E}^2 \mid t \in [0, \infty)\}$$

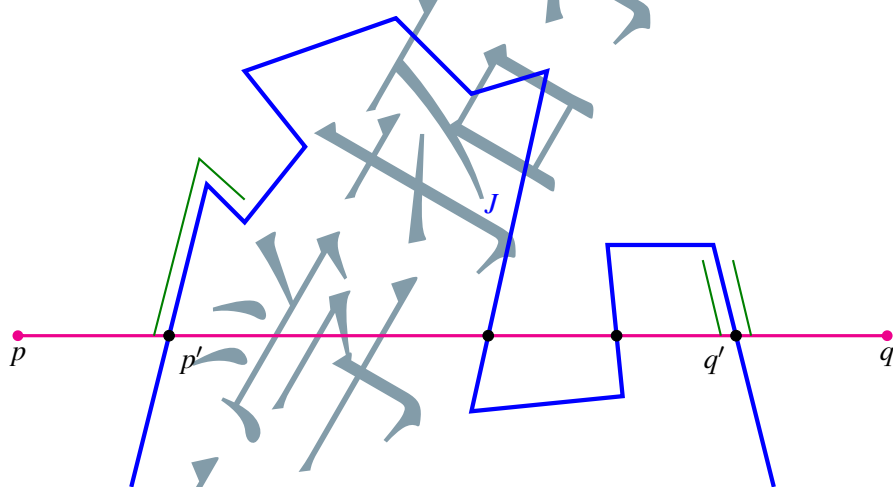
因为 $\vec{v}$ 与所有的边都不平行, ℓ_x 与 J 相交于有限多个点. $y \in \ell_x \cap J$ 称为有效相交点, 如果 y 不是顶点, 或者 y 是顶点但包含 y 的两条边在 ℓ_x 的两侧. 点 $x \in \mathbb{E}^2 \setminus J$ 的奇偶性定义为 ℓ_x 与 J 有效相交点数的奇偶性. 令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 中偶点的集合, $\mathcal{B}$ 为奇点的集合. 参看下图。



断言 (A). 如果线段 $\mathcal{P}$ 与 J 不交, 则 $\mathcal{P}$ 中任意两点奇偶性相同。

我们考虑当 x 在线段 $\mathcal{P}$ 上移动是 ℓ_x 与 J 的相交。相交数只有当 ℓ_x 与 J 的交点包含顶点时发生改变, 如果该顶点是有效相交点, 则 $\# \ell_x \cap J$ 不改变, 如果是无效相交点, 则 $\# \ell_x \cap J$ 增加或者减少 2, 但奇偶性不变。

断言 (B). 如果两点 $p, q \in \mathbb{E}^2 \setminus J$ 具有相同的奇偶性, 则存在与 J 不交的折线连接 p 到 q 。



20.2 Jordan 闭曲线定理的证明

对于一般情形, 我们的证明基于 Maehara 的文章 [Mae84] (Maehara 的证明基于 Moise 的证明)。我们先证明如下引理

引理 20.6. 设 $\alpha: [0, 1] \rightarrow D^2$ 是一条道路, 满足 $\alpha^{-1}(S^1) = \{0, 1\}$ 及 $\alpha(0) \neq \alpha(1)$, 则 α 分离 D^2 , 也就是说, $D^2 \setminus \alpha([0, 1])$ 不道路连通。

证明. 采用反证法, 我们假设 $D^2 \setminus \alpha([0, 1])$ 道路连通。我们把 D^2 看作复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘。不失一般性, 我们设 $\alpha(0) = -i$ 及 $\alpha(1) = i$ 。依假设, 存在道路 $\beta: [0, 1] \rightarrow D^2 \setminus \alpha([0, 1])$ 连接 -1 到 1 。定义映射 $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ 为

$$f(a, b) = \frac{\alpha(a) - \beta(b)}{\|\alpha(a) - \beta(b)\|}.$$

记 $\square$ 为 $[0,1] \times [0,1]$ 的边界。令 $O = (0,0)$ 及 $x_0 = f(O) = \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)$ 。定义同伦 $G: \square \times [0,1] \rightarrow S^1$ 为 $G((a,b),t) = f(ta,tb)$ ，于是 $f: \square \rightarrow S^1$ 零伦（这里我们仍用 f 表示它在 $\square$ 上的限制），特别地，诱导同态 $f_*: \pi_1(\square, O) \rightarrow \pi_1(S^1, x_0)$ 平凡。

如图23所示，令 $\eta: [0,1] \rightarrow \square$ 为 $\square$ 中基于 O 的环路，由如下定义的四条道路 $\eta_i: [0,1] \rightarrow \square$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

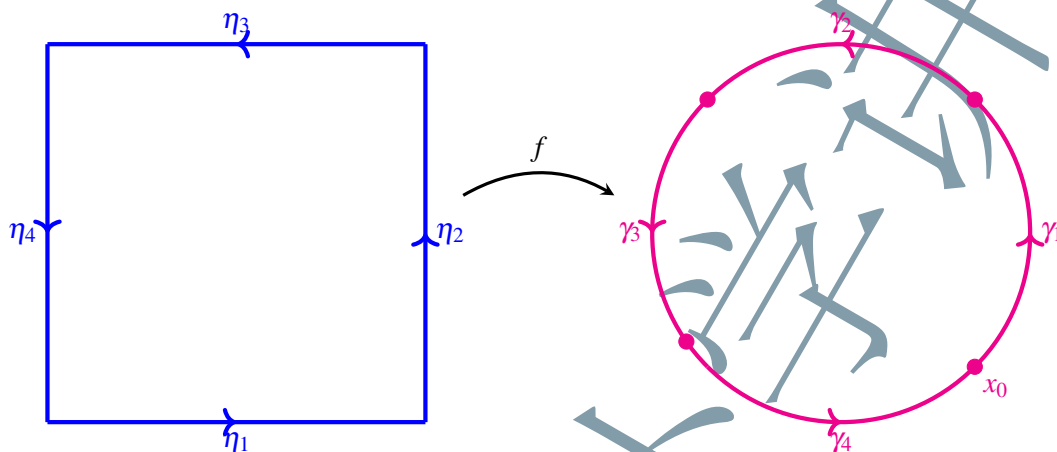


图 23

连接而得

$$\eta_1(s) = (s, 0), \quad \eta_2(s) = (1, s), \quad \eta_3(s) = (1-s, 1), \quad \eta_4(s) = (0, 1-s).$$

令 $\gamma_i: [0,1] \rightarrow S^1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 为道路 $\gamma_i(s) = f \circ \eta_i(s)$ ，即

$$\gamma_1(s) = f(s, 0), \quad \gamma_2(s) = f(1, s), \quad \gamma_3(s) = f(1-s, 1), \quad \gamma_4(s) = f(0, 1-s).$$

道路 γ_1 连接 $x_0 = \exp(-\pi i/4)$ 到 $\exp(\pi i/4)$ 。因为 $\gamma_1(s) = \frac{\alpha(s)+1}{\|\alpha(s)+1\|}$ ， $\gamma_1(s)$ 的实部非负。令道路 $\gamma'_1: [0,1] \rightarrow S^1$ 定义为 $\gamma'_1(s) = \exp\left(\frac{(2s-1)\pi i}{4}\right)$ 。则对任意 $s \in [0,1]$ 有 $\gamma_1(s) \neq -\gamma'_1(s)$ ，所以 γ_1 与 γ'_1 定端同伦，同伦为

$$H_1(s,t) = \frac{(1-t)\gamma_1(s) + t\gamma'_1(s)}{\|(1-t)\gamma_1(s) + t\gamma'_1(s)\|}$$

对 γ_2 、 γ_3 和 γ_4 有同样构造，则 $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4$ 是 S^1 中基于 x_0 的环路，定端同伦于环路 $\gamma': [0,1] \rightarrow S^1$ ，其中 γ' 定义为 $\gamma'(s) = \exp\left(\frac{(8s-1)\pi i}{4}\right)$ 。 $\langle \gamma' \rangle$ 是 $\pi_1(S^1, x_0)$ 的生成元，我们有 $f_*(\langle \eta \rangle) = \langle f \circ \eta \rangle = \langle \gamma \rangle \neq 0$ ，

这与 f 零伦矛盾。所以不存在 $D^2 \setminus \alpha([0,1])$ 中从 -1 到 1 的道路，从而 $D^2 \times \alpha([0,1])$ 不连通。 ☺

约当曲线定理的证明。因为 J 紧致，我们可取点 $A, B \in J$ 使得 $d(A, B) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in J\}$ 。取包含 J 的矩形 M ，使得 $J \cap \partial M = \{A, B\}$ ，并且 A, B 是 M 一组对边的中点，并且这组对边与线段 $\overline{AB}$ 垂直。 A 和 B 将 J 分为两条道路从 A 到 B 的道路 J_1 和 J_2 。设 C 和 D 是 M 的另外两条边的中点。如图24所示。由引理，任何 M 中从 C 到 D 的道路（我们取线段 $\overline{CD}$ ）都与 J_1 和 J_2 相交。设 P_1 (P_2) 是 $\overline{CD} \cap J$ 最靠近 C (D) 的点（因为 $\overline{CD} \cap J$ 闭，所以 P_1 和 P_2 可以取到）。 P_1 和 P_2 不可能都属于 J_1 （都属于 J_2 ），否则，道路（图25a）

$$C \xrightarrow{\overline{CD}} P_1 \xrightarrow{J_1(J_2)} P_2 \xrightarrow{\overline{CD}} D$$

连接 C 到 D ，但与 J_2 (J_1) 不交。不失一般性，设 $P_1 \in J_1$ ， $P_2 \in J_2$ 。令 P_4 为 $\overline{CD} \cap J_2$ 中最靠近 C 的点， P_3 为 $\overline{CP_4} \cap J_1$ 中最靠近 P_4 的点。则 $\overline{P_3 P_4} \cap J = \{P_3, P_4\}$ 。记 Q 为线段 $\overline{P_3 P_4}$ 的中点。

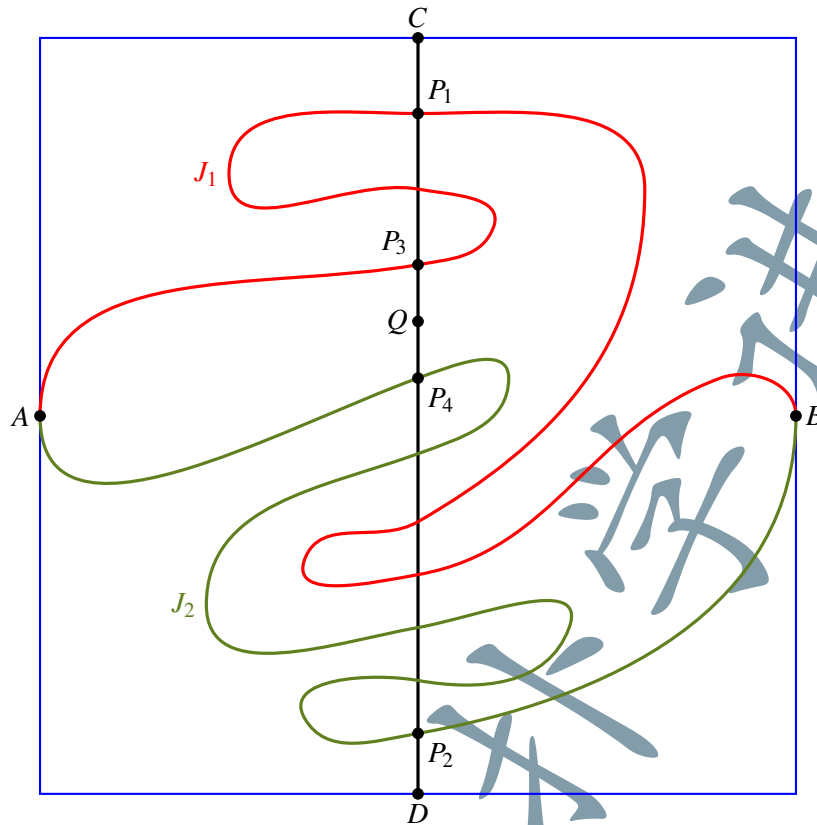


图 24

断言 (A). 不存在 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 中连接 Q 到 M 外任何一点的道路。从而 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 不连通。

如果存在道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2 \setminus J$ 连接 Q 到 $\alpha(1) \in \mathbb{E}^2 \setminus M$ (参看图 25b)。则 α 与 ∂M 相交不空, 令 E 为 α 与 ∂M 的第一个交点。 A 与 B 将 ∂M 分为两部分 ∂_1 和 ∂_2 , 其中 ∂_1 包含 C , ∂_2 包含 D 。不妨设 $E \in \partial_1$, 则 M 中的如下道路 (参看图 25c)

$$D \xrightarrow{\overline{CD}} P_2 \xrightarrow{J_2} P_4 \xrightarrow{\overline{CD}} Q \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\partial_1} C$$

连接 D 到 C , 并且与 J_1 不交。所以不存在 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 中连接 Q 到 M 外的道路。

断言 (B). $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 的每个连通分支都以 J 为边界。

设 U 是 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 的连通分支。我们有 $\partial U = \overline{U} \cap (\mathbb{E}^2 \setminus U)$ 。因 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 开, 对 $x \in \mathbb{E}^2 \setminus J$, 如果 $x \in U$, 则 $x \notin \mathbb{E}^2 \setminus U$ 从而 $x \notin \partial U$; 如果 $x \notin U$, 则 $x \notin \overline{U}$ 从而 $x \notin \partial U$ 。所以我们有 $\partial U \subseteq J$ 。

如果 $\partial U \subsetneq J$, 则存在 $L \subset J$ 使得 $L \cong [0, 1]$ 且 $\partial U \subset L$ 。由 Tietze 扩张定理, 恒同映射 $1_L: L \rightarrow L$ 可以扩张为收缩映射 $r: \mathbb{E}^2 \rightarrow L$ 。令 $i_L: L \hookrightarrow \mathbb{E}^2$ 为含入映射, 如果 U 是一个有界分支, 定义 $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 为

$$f(x) = \begin{cases} i \circ r(x), & x \in \overline{U}, \\ x, & x \in \mathbb{E}^2 \setminus U, \end{cases}$$

如果 U 是 (唯一的) 无界分支, 定义 f 为

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \overline{U}, \\ i \circ r(x), & x \in \mathbb{E}^2 \setminus U, \end{cases}$$

因为对 $x \in \partial U = \overline{U} \cap (\mathbb{E}^2 \setminus U)$ 有 $i \circ r(x) = x$, 由焊接引理, f 连续。取内部包含 M 的圆盘 D , 则 f 在 D 上的限制 f_0 保持 ∂D 不动。 f_0 不满, 因为 $(J \setminus L) \cap f_0(D) = \emptyset$ 且 $J \setminus L \neq \emptyset$ 。取 $x_0 \in J \setminus L$ 。对任意 $x \in D$, 令

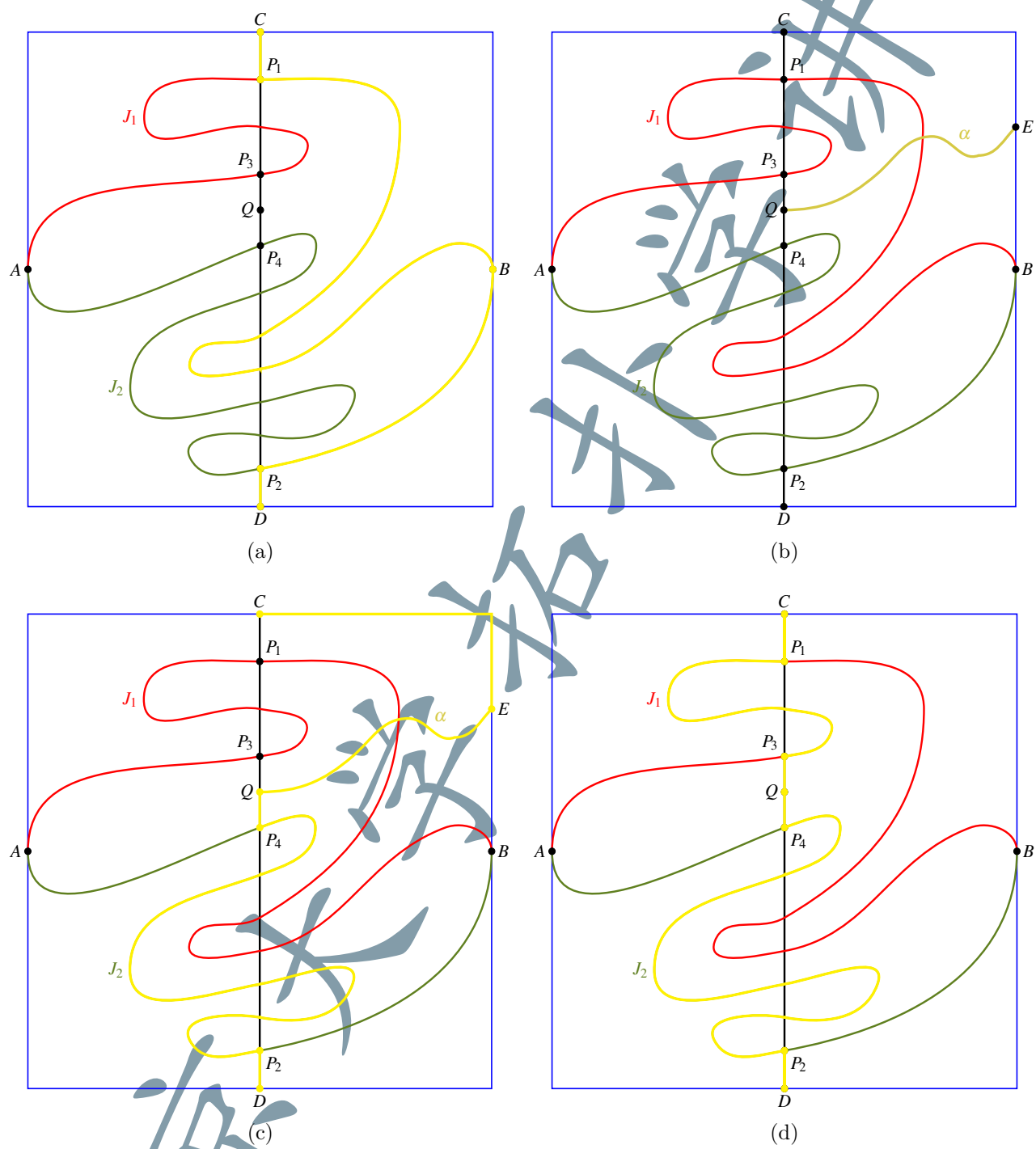


图 25

$g(x)$ 为从 x_0 出发经过 x 的半直线与 $\partial D \cong S^1$ 的交。则我们得到从 D 到 S^1 的压缩映射。这是不可能的，所以 $\partial U = J$ 。

断言 (C). $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 有且只有两个连通分支。

我们已经由两个连通分支：包含 Q 的分支和包含 $\mathbb{E}^2 \setminus M$ 的无界分支。如果还有第三个连通分支 V ，则 $Q \notin V$ 且 $V \subseteq M$ 。道路（参看图25d）

$$\beta: C \xrightarrow{\overline{CD}} P_1 \xrightarrow{J_1} P_3 \xrightarrow{\overline{CD}} P_4 \xrightarrow{J_2} P_2 \xrightarrow{\overline{CD}} D$$

与 V 不交，引理说明 A 和 B 在 $M \setminus \beta([0,1])$ 的不同的连通分支里。另一方面， $A, B \in J = \partial V$ 而 V 连通， $V \subset V \cup \{A, B\} \subset \bar{V}$ ，所以 $V \cup \{A, B\}$ 连通，于是 A 和 B 包含在 $M \setminus \beta([0,1])$ 的同一连通分支内，矛盾。

所以 $\mathbb{E}^2 \setminus J$ 恰好有连个连通分支：一个包含 Q ，另一个是无界分支，每个分支都以 J 为边界。 ☺

与 Jordan 曲线定理相反，如果我们有同胚于闭区间 $[0,1]$ 的 $\mathbb{E}^2$ 的曲线，则它并不分离平面。这样的曲线称为简单曲线。

定理 20.7. E^2 中同胚于闭区间 $[0,1]$ 的子空间 C 不分离 $\mathbb{E}^2$ 。

证明. 假设 $\mathbb{E}^2 \setminus A$ 有多于一个连通分支。因为 A 紧致，我们可以取包含 C 的圆盘 D ，设 $S^1 = \partial D$ 。设 K 是 $\mathbb{E}^2 \setminus C$ 的一个有界分支，则 $K \subset D$ 。取 $p \in K$ ，设 $r: D \setminus \{p\} \rightarrow S^1$ 为沿着连接 p 与 S^1 各点的直线而作的收缩映射，即

$$r((1-t)p + tx) = x, \quad \forall t \in (0,1], x \in S^1$$

令 $f: D \setminus K \rightarrow S^1$ 为 r 在 $D \setminus K$ 上的限制。

考虑 r 在 C 上的限制 h 。由于 $C \cong [0,1]$ ，可以提升 h 为映射 $\tilde{h}: C \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得 $\pi \circ \tilde{h} = h$ ，这里 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ 为指数映射。由 Tieze 扩张引理， $\tilde{h}$ 可扩张为连续映射 $\tilde{g}: C \cup K \rightarrow \mathbb{R}$ ，令 $g = \pi \circ \tilde{g}: C \cup K \rightarrow S^1$ 。

定义函数 $F: D^2 \rightarrow S^1$ 为

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \setminus K, \\ g(x), & x \in C \cup K. \end{cases}$$

因为 f 与 g 在 C 上相等，所以 F 良定。欧氏空间的开集的连通分支必为开集，所以 K 是开集。所以 $D \setminus K$ 为闭集。另外， K 的闭包不能与 $\mathbb{E}^2 \setminus C$ 的其他连通分支相交，所以 $\bar{K} \subset C \cup K$ 。由于 C 是 D 中的闭集，措意 $C \cup K$ 是 D 中闭集。所以有焊接引理， F 连续。

对 $x \in S^1$ ，我们有 $F(x) = f(x) = x$ ，所以 F 为从 D 到 S^1 的收缩映射。矛盾。 ☺