

拓扑学, 2020 年秋

作业 5

上交时间: 2020 年 12 月 30 日

1. 证明下列空间相互同伦等价
 - (a) 球面 S^2 与一条直径的并。
 - (b) 在环面的一个纬圆上粘接一个圆盘。
 - (c) 球面 S^2 与圆周的一点并。
2. 证明: 对 $n > 2$, D^2 与 D^n 不同胚。
3. 计算下列空间的基本群 (必须写明计算过程)
 - (a) T^2 中去掉三个点。
 - (b) $\mathbb{E}^3$ 中去掉 3 条坐标轴。
 - (c) $\mathbb{E}^3$ 中去掉 2 条不相交的直线。
4. 设 $f: D^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是连续映射, 证明在下列条件之一成立时, f 均有不动点
 - (a) $f(S^1) \subset D^2$;
 - (b) 对任意 $x \in S^1$, $f(x)$ 、 x 与原点不共线;
 - (c) 对任意 $x \in S^1$, 线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点。
5. 记 S_i^2 是 $\mathbb{E}^3$ 中以 $(i, 0, 0)$ 为球心的半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面, 令 $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i^2$ 。证明 X 单连通。
6. 设 K 是 Klein 瓶, X 是 Klein 瓶在 $\mathbb{R}^3$ 中的自相交于一个圆周的浸入的像空间, 设 $f: K \rightarrow X$ 为自然映射。
 - (a) 计算 K 和 X 的基本群。
 - (b) 计算 f 的诱导同态 $f_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(X)$ 。
 - (c) f_* 是单同态吗? 是满同态吗?
7. 记 X 为拓扑学家的梳子, 证明不存在从 $[0, 1] \times [0, 1]$ 到 X 的收缩映射。
8. 设
$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid \text{存在 } n \in \mathbb{Z}, \text{ 使得 } (x - n)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}$$
证明 X 单连通。