

基础拓扑学, 2020 年秋

作业 4

上交时间: 12 月 16 日

1. 设 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 与恒同映射不同伦, 证明 f 必有不动点, 即存在 $x \in S^1$, 使得 $f(x) = x$ 。
2. 证明从拓扑空间 X 到 Y 的映射零伦当且仅当它可以扩张为从 X 上的锥形到 Y 的映射。
3. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, ω 为连接 X 中点 x_0 到 x_1 的道路类。证明

$$(f \circ \omega)_\# \circ f_* = f_* \circ \omega_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_1))$$

换言之, 下面的图表交换

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ \downarrow \omega_\# & & \downarrow (f \circ \omega)_\# \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_1)) \end{array}$$

4. 设空间 X 道路连通, 取基点 x_0 和 x_1 , 任何从 x_0 到 x_1 的道路 ω 给出同构

$$\omega_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

证明 $\omega_\#$ 不依赖于 ω 的选取当且仅当 $\pi_1(X, x_0)$ 是交换群。

5. 设映射 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 定义为 $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), 描述同态 $f_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ 。
6. 设 A 是空间 X 的道路连通子空间, 取基点 $x_0 \in A$, 证明包含映射 $A \hookrightarrow X$ 诱导的同态 $\pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是满同态当且仅当 X 中的每条端点在 A 中的道路可以定端同伦到 A 中的道路。
7. 定义映射

$$f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1], \quad f(\theta, s) = (\theta + 2\pi s, s)$$

证明:

- (a) f 可以相对于 $S^1 \times \{0\}$ 或者 $S^1 \times \{1\}$ 同伦于恒同映射。
- (b) f 不可能相对于 $S^1 \times \{0, 1\}$ 同伦于恒同映射。