

基础拓扑学, 2020 年秋

作业 3

上交时间: 11 月 13 日

- (a) 给出 $\mathbb{E}^1$ 的没有有限子覆盖的开覆盖。对 $[0, 1)$ 和 $(0, 1)$ 给出同样的构造。
(b) 证明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ 的任意子集都是紧致的, 这里 $\mathcal{T}_f$ 是 $\mathbb{R}$ 上的余有限拓扑。证明 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ 不是紧致的, 这里 $\mathcal{T}_c$ 是 $\mathbb{R}$ 上的余可数拓扑。
(c) 应用 Heine-Borel 定理证明闭区间 $[a, b]$ 上的任意无穷子集都有聚点。
- 证明紧致的度量空间都是第二可数的。证明一个度量空间 X 是紧致的当且仅当任意连续函数 $f: X \rightarrow \mathbb{E}^1$ 有界。
- (a) 给出一个拓扑空间和它的一个紧致子集, 使得该紧致子集的闭包不紧致。
(b) 设 X 是一个拓扑空间, 它的任意不相交的闭子集 A 和 B 都有不相交的邻域。证明 X 的紧致子集的闭包紧致。
- 证明从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续单射都是嵌入。
- 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 称为局部紧的, 如果每个点都有一个闭包紧致的开邻域。设 X 是一个拓扑空间, 定义 X 的一点紧致化为 $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$, 其上拓扑定义为

$$\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\tilde{X}\} \cup \{\tilde{X} \setminus K \mid K \text{ 是 } X \text{ 中紧致闭集}\}$$

- (a) 验证 $\tilde{\mathcal{T}}$ 是 $\tilde{X}$ 上的一个拓扑。
(b) 证明 $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ 是紧致的拓扑空间。
(c) 如果 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 证明 $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$ 是 Hausdorff 的。
(d) 证明平面的一点紧致化空间同胚于二维球面。
(e) 如果 X 与 Y 同胚, 证明它们的一点紧致化空间同胚。
- 如果 X 是连通的 Hausdorff 空间, 如果 X 的任意两个不相交的闭集有不相交的开邻域, 证明 X 是不可数的。
- 证明或者举出反例
 - 如果 X_1 与 X_2 是连通空间 X 的两个开子集, 满足 $X_1 \cup X_2 = X$, 并且 $X_1 \cap X_2$ 是非空连通的, 则 X_1 与 X_2 均连通。
 - 如果拓扑空间 X 是连通的, 并且每个点都包含在一个道路连通的开子集内, 则 X 道路连通。
- (a) 证明 $[0, 1)$ 与 $[0, 1]$ 不同胚, 但 $[0, 1] \times [0, 1)$ 与 $[0, 1) \times [0, 1)$ 同胚。
(b) 证明 $\mathbb{E}^1$ 与 $\mathbb{E}^n$ ($n > 1$) 不同胚。
- 如果 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ 连续, 证明 f 既不是单射也不是满射。如果 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$ 连续, 证明存在 $t \in \mathbb{E}^1$ 使得 $f^{-1}(t)$ 不可数, 并且至多存在两个 $\mathbb{E}^1$ 中的点, 其逆像非空但可数。
- (a) 证明欧式空间, 从而任何局部欧氏的空间 (例如球面), 是局部连通的。赋予 $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 作为 $\mathbb{E}^1$ 子空间的拓扑, 证明 X 不是局部连通的。
(b) 证明局部连通性为同胚所保持, 但不一定为连续映射所保持。
(c) 证明空间 X 局部连通当且仅当 X 的每个开集的每个连通分支是开集。
- 构造一个空间的道路连通子集, 使得其闭包不是道路连通的。(拓扑学家的正 (余) 弦曲线除外。)