

拓扑学, 2020 年秋季

作业 2

上交时间: 10 月 28 日

1. 一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为开 (闭) 映射, 如果 X 中开 (闭) 集的像集是 Y 中的开集 (闭集)。z, 和不是开映射的闭映射的例子。
2. 假设映射 $f: X \rightarrow Y$ 是一一的满射, 证明下列条件等价
 - (a) f 是开映射。
 - (b) f 是闭映射。
 - (c) f^{-1} 连续。
3. 是否存在满的连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$? 为什么?
4. 构造从 $[0, 1]$ 到 S^2 的连续满映射。
5. 若 X, Y 可分, 证明 $X \times Y$ 可分。
6. 设 Y 是 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则 f 的图像 $G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ 是 $X \times Y$ 的闭子集。
7. 证明 T_2 公理和 C_2 公理都有可乘性和遗传性。
8. 令 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ 。证明 $\mathcal{B}$ 所生成的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑不是第二可数的。
9. 记 S 为所有无理数的集合, 在 $\mathbb{R}$ 上, 定义 $\mathcal{T}$ 为所有形如 $U \setminus A$ 的子集组成的集合, 其中 U 为 $\mathbb{E}^1$ 中的开集, A 是 S 的子集。
 - (a) 证明 $\mathcal{T}$ 给出了 $\mathbb{R}$ 上可分的拓扑;
 - (b) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 C_1 公理但不满足 C_2 公理;
 - (c) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 T_2 公理但不满足 T_3 公理;
 - (d) 证明 $\mathcal{T}$ 在 S 上的子空间拓扑 $\mathcal{T}_S$ 是离散拓扑, 从而 $(S, \mathcal{T}_S)$ 是不可分的。
10. 设 X 满足 T_4 公理, A 是 X 的闭子集, 证明连续映射 $f: A \rightarrow \mathbb{E}^n$ 可连续扩张到 X 上。
11. 证明度量空间的任意闭子集都是可数多个开集的交。
12. 设 S^n 是 $\mathbb{E}^{n+1}$ 的单位球面。设 X 是度量空间, A 是 X 的闭子集。证明任意连续函数 $f: A \rightarrow S^n$ 可以连续延拓到 A 的一个开邻域 (即连续延拓到 X 中某个包含 A 的开子集)。