

同伦论, 2019 年春季

作业 3

上交时间: 5 月 29 日

1. 设 CW 复形 X 由 $S^1 \vee S^n (n > 1)$ 上粘贴一个 $(n+1)$ 维胞腔 e^{n+1} 得到, 粘合映射由多项式 $p(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \cong \pi_n(S^1 \vee S^n)$ 给出, 于是 $\pi_n(X) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(p(t))$ 。证明 $\pi'_n(X)$ 是循环群, 并通过 $p(t)$ 确定该群的阶数。
2. 证明单连通的闭三维流形与 S^3 同伦等价。
3. 如果 CW 复形 X 是 $K(G, 1)$ 空间, 证明 $\pi_n(X^n)$ 对 $n \geq 2$ 是自由交换群。
4. 如果 X 是 $(n-1)$ 连通的 CW 复形, 证明 Hurewicz 同态 $h: \pi_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X)$ 当 $n > 1$ 时是满射, 当 $n = 1$ 时, 证明有同构

$$H_2(X)/h(\pi_2(X)) \cong H_2(K(\pi_1(X), 1))$$

5. 设 X 是连通的有限维 CW 复形, 万有复叠为 $\tilde{X}$, 证明 X 与 $\tilde{X} \times K(\pi_1(X), 1)$ 具有同构的同伦群; 如果 $p_{i_1}(X)$ 有有限阶元素, 证明它们不同伦等价。
6. 设 $S^k \rightarrow S^m \rightarrow S^n$ 是纤维丛, 证明 $k = n - 1, m = 2n - 1$ 。
7. 证明 $\pi_3(S^1 \vee S^2)$ 不是有限生成的 $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^2)]$ -模。推广到 $\pi_{i+j-1}(S^1 \vee S^i \vee S^j)$ (设 $i, j > 1$)。
8. 证明存在映射 $f: \mathbb{RP}^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$, 使得 f 在同调上的诱导同态平凡, 但在上同调上的诱导同态不平凡 (证明之)。
9. 给定 S^1 上从 $\mathbb{C}$ 上乘积而来的群结构。证明对任意 CW 复形 X , S^1 的群结构诱导了 $\langle X, S^1 \rangle$ 上的群结构, 并且定理 4.57 给出的一一映射是群同构。
10. 给定交换群 G 和 H , 以及 CW 复形 $K(G, n)$ 和 $K(H, n)$, 证明映射

$$\langle K(G, n), K(H, n) \rangle \rightarrow \text{Hom}(G, H), \quad [f] \mapsto (f_*: \pi_n(K(G, n)) \rightarrow \pi_n(K(H, n)))$$

是一一映射。

11. 设 X 是 n 维 CW 复形, 证明 $[X, S^n] \cong H^n(X; \mathbb{Z})$ 。
12. 证明映射 $p: E \rightarrow B$ 是纤维化当且仅当 $\pi: E^{[0,1]} \rightarrow E_p, \pi(\gamma) = (\gamma(0), p \circ \gamma)$ 有截面, 即, 存在映射 $s: E_p \rightarrow E^{[0,1]}$ 使得 $p \circ s = \text{id}_{E_p}$ 。
13. 给定纤维化 $F \rightarrow E \rightarrow B$, 用同伦提升性质定义 $\pi_1(E)$ 在 $\pi_n(F)$ 上的作用, 即同态 $\pi_1(E) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(F))$, 使得 $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(F))$ 是 $\pi_1(F)$ 在 $\pi_n(F)$ 上的作用 (定义同伦群时给出)。
14. 给定映射 $f: A \rightarrow B$ 和同伦等价 $g: C \rightarrow A$, 证明纤维化 $E_f \rightarrow B$ 和 $E_{fg} \rightarrow B$ 是纤维同伦等价的。
15. 如果纤维化 $p: E \rightarrow B$ 是同伦等价, 证明 p 和平凡纤维化 $\text{id}: B \rightarrow B$ 是纤维同伦等价的。