

同伦论, 2019 年春季

作业 2

上交时间: 4 月 24 日

1. 设 X 与 Y 是道路连通的 CW 复形, 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 诱导了基本群的同构, 并且 f 在万有复迭上的某个提升 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ 诱导了同调上的同构, 证明 f 是一个同伦等价。
2. 设 X 与 Y 均为 n 维的 CW 复形, $f: X \rightarrow Y$ 对 $i \leq n$ 诱导了 π_i 上的同构, 证明 f 是一个同伦等价。
3. 对 $n \geq 2$, 计算 $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{P}P^{n-1})$ 。说明商映射 $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}P^n / \mathbb{R}P^{n-1}$ 不诱导同伦群的等价。
4. 设 X 是拓扑空间, Y 是 CW 复形, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$ 满足 $g \circ f$ 同伦于 X 上的恒同映射。证明 X 与某个 CW 复形同伦等价。
5. 对 $n > k > 0$, 证明不存在从 $\mathbb{R}P^n$ 到 $\mathbb{R}P^k$ 的收缩映射。
6. 设 X 是 $(n-1)$ -连通的 CW 复形, 证明
 - (a) 若 $n > 1$, 则 $h: \pi_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X)$ 是满同态;
 - (b) 若 $n = 1$, 则有同构

$$\frac{H_2(X)}{h(\pi_2(X))} \cong H_2(K(\pi_1(X), 1))$$