拓扑学, 2019 年秋

作业 6

上交时间：上课时定

1. 证明下列空间相互同伦等价
   (a) 球面 S^2 与一条直径的并。
   (b) 在环面的一个纬圆上粘接一个圆盘。
   (c) 球面 S^2 与圆周的一点并。

2. 证明 $\mathbb{E}^2$ 与 $\mathbb{E}^3$ 不同胚。

3. 计算下列空间的基本群（必须写明计算过程）
   (a) T^2 中去掉三个点。
   (b) $\mathbb{E}^3$ 中去掉 3 条坐标轴。
   (c) $\mathbb{E}^3$ 中去掉 2 条不相交的直线。

4. 设 $f: D^2 \to \mathbb{E}^2$ 是连续映射，证明在下列条件之一成立时，f 均有不动点
   (a) $f(S^1) \subset D^2$;
   (b) 对任意 $x \in S^1$，$f(x)$、x 与原点不共线;
   (c) 对任意 $x \in S^1$，线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点。

5. 记 S_i^2 是 $\mathbb{E}^3$ 中以 $(i, 0, 0)$ 为球心的半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面，令 $X = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} S_i^2$。证明 X 单连通。

6. 设 K 是 Klein 瓶，X 是 Klein 瓶在 $\mathbb{R}^3$ 中的自相交于一个圆周的浸入的像空间，设 $f: K \to X$ 为自然映射。
   (a) 计算 K 和 X 的基本群。
   (b) 计算 f 的诱导同态 $f_*: \pi_1(K) \to \pi_1(X)$。
   (c) f_* 是但同态吗？是满同态吗？

7. Borsuk-Ulam 定理对环面是否成立？换而言之，是否对任何连续映射
   $$f: S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$$
   都存在 $(v, w) \in S^1 \times S^1$，使得
   $$f(v, w) = f(-v, -w)?$$

8. 设 $\ell \subset \mathbb{R}^2$ 是闭子集，并且同胚与 $\mathbb{R}^1$，证明 $\mathbb{R}^2 \setminus \ell$ 具有两个连通分支，并且 ℓ 是每个连通分支的边界。

9. 找到 $S^1 \vee S^1$ 的所有的连通的 2 叶复叠空间，和 3 叶复叠空间。构造两个不同形式的 4 叶复叠映射。

10. 找到 $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$ 所有的复叠空间。

11. 设 $p: E \to B$ 是复叠映射，V 是 E 的道路连通开子集，$U = p(V)$。如果含入映射 $i: U \hookrightarrow B$ 所诱导的基本群的同态是平凡的，证明 $p\big|_V: V \to U$ 是同胚。

12. 设 $p: E \to B$ 是复叠映射，$\widetilde{x} \in E$，$x = p(\widetilde{x})$。设 α 与 β 是 B 中从 x 到某点 $y \in B$ 的道路，$\widetilde{\alpha}$ 和 $\widetilde{\beta}$ 是 α 和 β 以 $\widetilde{x}$ 为起点的提升。证明 $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ 当且仅当 $\langle \alpha.\overline{\beta} \rangle \in p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$。

13. 证明任何从 S^2 到 T^2 的映射零伦。证明从 $\mathbb{RP}^2$ 到 T^2 只有一个映射类。

14. 设 X 是道路连通、局部道路连通的空间，$\pi_1(X)$ 有限（即基本群是有限群），证明任何映射 $f: X \to S^1$ 零伦。

15. 构造两个有限图（或拓扑空间）X_1 和 X_2，同时满足下列两条

(a) X_1 和 X_2 分别有有限叶复叠 $\widetilde{X}_1$ 和 $\widetilde{X}_2$，$\widetilde{X}_1 = \widetilde{X}_2$；

(b) 不存在空间 X，同时以 X_1 和 X_2 为复叠空间。

换而言之，构造左侧复叠空间的图表，使得不存在右侧的图表

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "q_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "q_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

这里 p_1, p_2, q_1, q_2 均为有限复叠。

16. 给定复合映射$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，设 Z 局部道路连通，设 $g: Y \to Z$ 和复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 都是复叠空间，

(a) 证明 $f: X \to Y$ 也是复叠空间；

(b) 如果 $g \circ f: X \to Z$ 是正规复叠，证明 f 也是正规复叠。