

拓扑学, 2019 年秋

作业 6

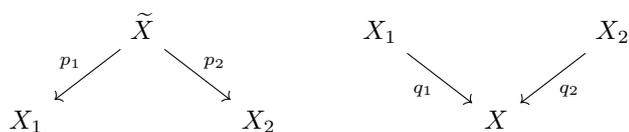
上交时间: 上课时定

- 证明下列空间相互同伦等价
 - 球面 S^2 与一条直径的并。
 - 在环面的一个纬圆上粘接一个圆盘。
 - 球面 S^2 与圆周的一点并。
- 证明 \mathbb{E}^2 与 \mathbb{E}^3 不同胚。
- 计算下列空间的基本群 (必须写明计算过程)
 - T^2 中去掉三个点。
 - \mathbb{E}^3 中去掉 3 条坐标轴。
 - \mathbb{E}^3 中去掉 2 条不相交的直线。
- 设 $f: D^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是连续映射, 证明在下列条件之一成立时, f 均有不动点
 - $f(S^1) \subset D^2$;
 - 对任意 $x \in S^1$, $f(x)$ 、 x 与原点不共线;
 - 对任意 $x \in S^1$, 线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点。
- 记 S_i^2 是 \mathbb{E}^3 中以 $(i, 0, 0)$ 为球心的半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面, 令 $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i^2$ 。证明 X 单连通。
- 设 K 是 Klein 瓶, X 是 Klein 瓶在 \mathbb{R}^3 中的自相交于一个圆周的浸入的像空间, 设 $f: K \rightarrow X$ 为自然映射。
 - 计算 K 和 X 的基本群。
 - 计算 f 的诱导同态 $f_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(X)$ 。
 - f_* 是单同态吗? 是满同态吗?
- Borsuk-Ulam 定理对环面是否成立? 换言之, 是否对任何连续映射
$$f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
都存在 $(v, w) \in S^1 \times S^1$, 使得
$$f(v, w) = f(-v, -w)?$$
- 设 $\ell \subset \mathbb{R}^2$ 是闭子集, 并且同胚与 \mathbb{R}^1 , 证明 $\mathbb{R}^2 \setminus \ell$ 具有两个连通分支, 并且 ℓ 是每个连通分支的边界。
- 找到 $S^1 \vee S^1$ 的所有的连通的 2 叶复叠空间, 和 3 叶复叠空间。构造两个不同形式的 4 叶复叠映射。
- 找到 $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ 所有的复叠空间。
- 设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, V 是 E 的道路连通开子集, $U = p(V)$ 。如果包含映射 $i: U \hookrightarrow B$ 所诱导的基本群的同态是平凡的, 证明 $p|_V: V \rightarrow U$ 是同胚。
- 设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, $\tilde{x} \in E$, $x = p(\tilde{x})$ 。设 α 与 β 是 B 中从 x 到某点 $y \in B$ 的道路, $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 是 α 和 β 以 \tilde{x} 为起点的提升。证明 $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ 当且仅当 $\langle \alpha, \beta \rangle \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ 。
- 证明任何从 S^2 到 T^2 的映射零伦。证明从 $\mathbb{R}P^2$ 到 T^2 只有一个映射类。
- 设 X 是道路连通、局部道路连通的空间, $\pi_1(X)$ 有限 (即基本群是有限群), 证明任何映射 $f: X \rightarrow S^1$ 零伦。
- 构造两个有限图 (或拓扑空间) X_1 和 X_2 , 同时满足下列两条

(a) X_1 和 X_2 分别有有限叶复叠 \tilde{X}_1 和 \tilde{X}_2 , $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$;

(b) 不存在空间 X , 同时以 X_1 和 X_2 为复叠空间。

换言之, 构造左侧复叠空间的图表, 使得不存在右侧的图表



这里 p_1, p_2, q_1, q_2 均为有限复叠。

16. 给定复合映射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 设 Z 局部道路连通, 设 $g: Y \rightarrow Z$ 和复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 都是复叠空间,

(a) 证明 $f: X \rightarrow Y$ 也是复叠空间;

(b) 如果 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 是正规复叠, 证明 f 也是正规复叠。