基础拓扑学, 2019 年秋

作业 4

上交时间：11 月 15 日

1. 设 A 是 Hausdorff 空间 X 的紧致子集，证明 X/A 是 Hausdorff 空间。
2. 设 $f: X \to Y$ 是商映射，$B \subset Y$ 是开集或闭集，令 $A = f^{-1}(B)$，证明 $f|_A : A \to B$ 是商映射。
3. 定义 $f: S^2 \to \mathbb{E}^4$ 为
$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$
证明 $f(S^2) \cong \mathbb{RP}^2$。这是射影空间在四维欧氏空间中的嵌入。
4. 记 $p: \mathbb{E}^1 \to \mathbb{E}^1/(0,1]$ 为粘合映射，
   (a) 证明 p 既不是开映射，也不是闭映射。
   (b) 记 $A = \mathbb{E}^1 \setminus (0,1]$，证明 $p_A : A \to p(A)$ 不是商映射。
5. 证明紧致流形满足 C_2 公理。
6. 证明紧致流形是可度量化的。
7. 证明流形是局部道路连通和局部紧致的。
8. 如果在环面上去掉一个圆盘的内部，然后把对径点粘合，所得到的曲面是什么类型？说明你的结论。
9. 如果在 Klein 瓶去掉一个圆盘的内部，然后把对径点粘合，所得到的曲面是什么类型？说明你的结论。

（以上两题说明 $T^2 + \mathbb{RP}^2 = K + \mathbb{RP}^2$，但此加法不满足消去律……）

10. 设 A 和 B 是拓扑群 G 的紧致子集，证明集合 $AB = \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$ 紧致。
11. 根据曲面的多边形表示判断闭曲面类型：
$$(a)\ abacb^{-1}dcd, \qquad (b)\ abca^{-1}cdeb^{-1}fedf.$$