

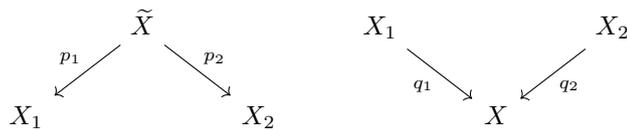
拓扑学, 2018 年秋

作业 7

上交时间: 2019 年 1 月 2 日

1. 设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, V 是 E 的道路连通子集, $U = p(V)$. 如果包含映射 $i: U \hookrightarrow B$ 所诱导的基本群的同态是平凡的, 证明 $p|_V: V \rightarrow U$ 是同胚。
2. 设 $p: E \rightarrow B$ 是复叠映射, $\tilde{x} \in E, x = p(\tilde{x})$. 设 α 与 β 是 B 中从 x 到某点 $y \in B$ 的道路, $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 是 α 和 β 以 \tilde{x} 为起点的提升. 证明 $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ 当且仅当 $\langle \alpha, \beta \rangle \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$.
3. 证明任何从 S^2 到 T^2 的映射零伦. 证明从 $\mathbb{R}P^2$ 到 T^2 只有一个映射类。
4. 设 X 是道路连通、局部道路连通的空间, $\pi_1(X)$ 有限 (即基本群是有限群), 证明任何映射 $f: X \rightarrow S^1$ 零伦。
5. 构造两个有限图 (或拓扑空间) X_1 和 X_2 , 同时满足下列两条
 - (a) X_1 和 X_2 分别有有限叶复叠 \tilde{X}_1 和 $\tilde{X}_2, \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$;
 - (b) 不存在空间 X , 同时以 X_1 和 X_2 为复叠空间。

换言之, 构造左侧复叠空间的图表, 使得不存在右侧的图表



这里 p_1, p_2, q_1, q_2 均为有限复叠。

6. 给定复合映射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 设 Z 局部道路连通, 设 $g: Y \rightarrow Z$ 和复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 都是复叠空间,
 - (a) 证明 $f: X \rightarrow Y$ 也是复叠空间;
 - (b) 如果 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 是正规复叠, 证明 f 也是正规复叠。
7. 设 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ 是泛复叠空间, $\pi_1(X, x_0)$ 以下列两种方式作用在纤维 $p^{-1}(x_0)$ 上
 - (a) 对点 $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, 将基于 x_0 的环路提升为基于 \tilde{x} 的道路, 将 \tilde{x} 映为道路的终点;
 - (b) 基本群每个元素对应的复叠变换限制在纤维 $p^{-1}(x_0)$ 上。

当 $X = S^1 \vee S^1$ 或 $X = S^1 \times S^1$ 时, 这两个作用是否相同? 当 $\pi_1(X)$ 是交换群时, 这两个作用是否总是相同?
8. 用棱道群计算 Klein 瓶的基本群。
9. 设 D^2 为 \mathbb{C} 中的单位圆盘. 定义等价关系如下: $x \sim y$ 当且仅当 $x = y$ 或者 $|x| = 1$ 且 $x^3 = y^3$. 给出 D/\sim 的三角剖分并计算其基本群。

以上题目选做 5 道即可。