拓扑学, 2018 年秋

作业 7

上交时间：2019 年 1 月 2 日

1. 设 $p: E \to B$ 是复叠映射，V 是 E 的道路连通开子集，$U = p(V)$。如果含入映射 $i: U \hookrightarrow B$ 所诱导的基本群的同态是平凡的，证明 $p\big|_V : V \to U$ 是同胚。

2. 设 $p: E \to B$ 是复叠映射，$\widetilde{x} \in E$，$x = p(\widetilde{x})$。设 α 与 β 是 B 中从 x 到某点 $y \in B$ 的道路，$\widetilde{\alpha}$ 和 $\widetilde{\beta}$ 是 α 和 β 以 $\widetilde{x}$ 为起点的提升。证明 $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ 当且仅当 $\langle \alpha.\overline{\beta} \rangle \in p_*(\pi_1(E, \widetilde{x}))$。

3. 证明任何从 S^2 到 T^2 的映射零伦。证明从 $\mathbb{RP}^2$ 到 T^2 只有一个映射类。

4. 设 X 是道路连通、局部道路连通的空间，$\pi_1(X)$ 有限（即基本群是有限群），证明任何映射 $f: X \to S^1$ 零伦。

5. 构造两个有限图（或拓扑空间）X_1 和 X_2，同时满足下列两条

   (a) X_1 和 X_2 分别有有限叶复叠 $\widetilde{X}_1$ 和 $\widetilde{X}_2$，$\widetilde{X}_1 = \widetilde{X}_2$；

   (b) 不存在空间 X，同时以 X_1 和 X_2 为复叠空间。

   换而言之，构造左侧复叠空间的图表，使得不存在右侧的图表

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "q_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "q_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   这里 p_1, p_2, q_1, q_2 均为有限复叠。

6. 给定复合映射$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，设 Z 局部道路连通，设 $g: Y \to Z$ 和复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 都是复叠空间，

   (a) 证明 $f: X \to Y$ 也是复叠空间；

   (b) 如果 $g \circ f: X \to Z$ 是正规复叠，证明 f 也是正规复叠。

7. 设 $p: (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 是泛复叠空间，$\pi_1(X, x_0)$ 以下列两种方式作用在纤维 $p^{-1}(x_0)$ 上

   (a) 对点 $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$，将基于 x_0 的环路提升为基于 $\widetilde{x}$ 的道路，将 $\widetilde{x}$ 映为道路的终点；

   (b) 基本群每个元素对应的复叠变换限制在纤维 $p^{-1}(x_0)$ 上。

   当 $X = S^1 \vee S^1$ 或 $X = S^1 \times S^1$ 时，这两个作用是否相同？当 $\pi_1(X)$ 是交换群时，这两个作用是否总是相同？

8. 用棱道群计算 Klein 瓶的基本群。

9. 设 D^2 为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘。定义等价关系如下：$x \sim y$ 当且仅当 $x = y$ 或者 $|x| = 1$ 且 $x^3 = y^3$。给出 $D/\sim$ 的三角剖分并计算其基本群。

以上题目选做 5 道即可。