

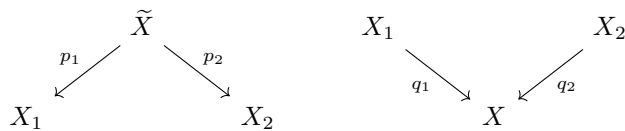
# 拓扑学, 2018 年秋

## 作业 7

上交时间: 2019 年 1 月 2 日

1. 设  $p: E \rightarrow B$  是复叠映射,  $V$  是  $E$  的道路连通子集,  $U = p(V)$ . 如果包含映射  $i: U \hookrightarrow B$  所诱导的基本群的同态是平凡的, 证明  $p|_V: V \rightarrow U$  是同胚。
2. 设  $p: E \rightarrow B$  是复叠映射,  $\tilde{x} \in E, x = p(\tilde{x})$ . 设  $\alpha$  与  $\beta$  是  $B$  中从  $x$  到某点  $y \in B$  的道路,  $\tilde{\alpha}$  和  $\tilde{\beta}$  是  $\alpha$  和  $\beta$  以  $\tilde{x}$  为起点的提升. 证明  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  当且仅当  $\langle \alpha, \beta \rangle \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ .
3. 证明任何从  $S^2$  到  $T^2$  的映射零伦. 证明从  $\mathbb{R}P^2$  到  $T^2$  只有一个映射类。
4. 设  $X$  是道路连通、局部道路连通的空间,  $\pi_1(X)$  有限 (即基本群是有限群), 证明任何映射  $f: X \rightarrow S^1$  零伦。
5. 构造两个有限图 (或拓扑空间)  $X_1$  和  $X_2$ , 同时满足下列两条
  - (a)  $X_1$  和  $X_2$  分别有有限叶复叠  $\tilde{X}_1$  和  $\tilde{X}_2, \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$ ;
  - (b) 不存在空间  $X$ , 同时以  $X_1$  和  $X_2$  为复叠空间。

换言之, 构造左侧复叠空间的图表, 使得不存在右侧的图表



这里  $p_1, p_2, q_1, q_2$  均为有限复叠。

6. 给定复合映射  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , 设  $Z$  局部道路连通, 设  $g: Y \rightarrow Z$  和复合映射  $g \circ f: X \rightarrow Z$  都是复叠空间,
  - (a) 证明  $f: X \rightarrow Y$  也是复叠空间;
  - (b) 如果  $g \circ f: X \rightarrow Z$  是正规复叠, 证明  $f$  也是正规复叠。
7. 设  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  是泛复叠空间,  $\pi_1(X, x_0)$  以下列两种方式作用在纤维  $p^{-1}(x_0)$  上
  - (a) 对点  $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ , 将基于  $x_0$  的环路提升为基于  $\tilde{x}$  的道路, 将  $\tilde{x}$  映为道路的终点;
  - (b) 基本群每个元素对应的复叠变换限制在纤维  $p^{-1}(x_0)$  上。当  $X = S^1 \vee S^1$  或  $X = S^1 \times S^1$  时, 这两个作用是否相同? 当  $\pi_1(X)$  是交换群时, 这两个作用是否总是相同?
8. 用棱道群计算 Klein 瓶的基本群。
9. 设  $D^2$  为  $\mathbb{C}$  中的单位圆盘. 定义等价关系如下:  $x \sim y$  当且仅当  $x = y$  或者  $|x| = 1$  且  $x^3 = y^3$ . 给出  $D/\sim$  的三角剖分并计算其基本群。

以上题目选做 5 道即可。