拓扑学, 2018 年秋

作业 6

上交时间：12 月 26 日

1. 证明下列空间相互同伦等价
   (a) 球面 S^2 与一条直径的并。
   (b) 在环面的一个纬圆上粘接一个圆盘。
   (c) 球面 S^2 与圆周的一点并。
2. 证明 $\mathbb{E}^2$ 与 $\mathbb{E}^3$ 不同胚。
3. 计算下列空间的基本群（必须写明计算过程）
   (a) T^2 中去掉三个点。
   (b) $\mathbb{E}^3$ 中去掉 3 条坐标轴。
   (c) $\mathbb{E}^3$ 中去掉 2 条不相交的直线。
4. 设 $f : D^2 \to \mathbb{E}^2$ 是连续映射，证明在下列条件之一成立时，f 均有不动点
   (a) $f(S^1) \subset D^2$;
   (b) 对任意 $x \in S^1$，$f(x)$、x 与原点不共线;
   (c) 对任意 $x \in S^1$，线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点。
5. 记 S_i^2 是 $\mathbb{E}^3$ 中以 $(i, 0)$ 为球心的半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面，令 $X = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} S_i^2$。证明 X 单连通。
6. 设 K 是 Klein 瓶，X 是 Klein 瓶在 $\mathbb{R}^3$ 中的自相交于一个圆周的浸入的像空间，设 $f : K \to X$ 为自然映射。
   (a) 计算 K 和 X 的基本群。
   (b) 计算 f 的诱导同态 $f_* : \pi_1(K) \to \pi_1(X)$。
   (c) f_* 是但同态吗？是满同态吗？
7. Borsuk-Ulam 定理对环面是否成立？换而言之，是否对任何连续映射
   $$f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$$
   都存在 $(v, w) \in S^1 \times S^1$，使得
   $$f(v, w) = f(-v, -w)?$$
8. 设 $\ell \subset \mathbb{R}^2$ 是闭子集，并且同胚与 $\mathbb{R}^1$，证明 $\mathbb{R}^2 \setminus \ell$ 具有两个连通分支，并且 ℓ 是每个连通分支的边界。
9. 找到 $S^1 \vee S^1$ 的所有的连通的 2 叶复叠空间，和 3 叶复叠空间。构造两个不同形式的 4 叶复叠映射。
10. 找到 $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$ 所有的复叠空间。