基础拓扑学, 2018 年秋

作业 5

上交时间：12 月 12 日

1. 设 $f: S^1 \to S^1$ 与恒同映射不同伦，证明 f 必有不动点，即存在 $x \in S^1$，使得 $f(x) = x$。

   Proof. Suppose that f has no fixed point, then $f(z)/z \in S^1 \setminus \{1\}$ for all $z \in S^1$. The map $h: (0, 2\pi) \to S^1 \setminus \{1\}, h(\theta) = \exp(\theta i)$ is an homeomorphism and let $g: S^1 \setminus \{1\}$ be its inverse. Define $H: S^1 \times [0,1] \to S^1$ as

   $$H(z,t) = z \exp\left(tg(f(z)/z) \cdot i\right)$$

   Then H is a homotopy from the identity to f. □

2. 证明从拓扑空间 X 到 Y 的映射零伦当且仅当它可以扩张为从 X 上的锥形到 Y 的映射。

   Proof. Let $H: X \times [0,1] \to Y$ be a homotopy of f to a constant map. □

3. 设 $f: X \to Y$ 是连续映射，ω 为连接 X 中点 x_0 到 x_1 的道路类。证明

   $$(f \circ \omega)_\# \circ f_* = f_* \circ \omega_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_1))$$

   换而言之，下面的图表交换

   $$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\omega_\#"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "(f\circ\omega)_\#"] \\ \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y, f(x_1)) \end{tikzcd}$$

   Proof. □

4. 设空间 X 道路连通，取基点 x_0 和 x_1，任何从 x_0 到 x_1 的道路 ω 给出同构

   $$\omega_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

   证明 $\omega_\#$ 不依赖于 ω 的选取当且仅当 $\pi_1(X, x_0)$ 是交换群。

5. 设映射 $f: S^1 \to S^1$ 定义为 $f(z) = z^n$（$n \in \mathbb{Z}$），描述同态 $f_*: \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$。

6. 设 A 是空间 X 的道路连通子空间，取基点 $x_0 \in A$，证明含入映射 $A \hookrightarrow X$ 诱导的同态 $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是满同态当且仅当 X 中的每条端点在 A 中的道路可以定端同伦到 A 中的道路。

7. 定义映射

   $$f: S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1], \qquad f(\theta, s) = (\theta + 2\pi s, s)$$

   证明：

   (a) f 可以相对于 $S^1 \times \{0\}$ 或者 $S^1 \times \{1\}$ 同伦于恒同映射。

   (b) f 不可能相对于 $S^1 \times \{0,1\}$ 同伦于恒同映射。

8. 拓扑学家的梳子定义为如下空间

   $$X = \left\{ (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \;\middle|\; x = 0 \text{或} y = 0 \text{或对某个} n \in \mathbb{N} \text{有} x = \frac{1}{n} \right\}$$

   证明 X 可以形变收缩到 X 中任何一点，X 可以强形变收缩到 $(x, 0)$ 或 $(\frac{1}{n}, y)$，但不能强形变收缩到 $(0, y)$（$y > 0$）。

9. 对于 $\mathbb{E}^2$ 中一点 x_0 和它的邻域 U，证明 $U \setminus \{x_0\}$ 不单连通。

10. 设 $f: X \to Y$ 是一个同伦等价，证明 f 的所有同伦逆构成 Y 到 X 的一个映射类。

11. 证明从 Möbius 带 X 的边界到 X 的含入映射诱导的基本群的同态不是同构。