

基础拓扑学, 2018 年秋

作业 4

上交时间: 11 月 28 日

1. 设  $A$  是 Hausdorff 空间  $X$  的紧致子集, 证明  $X/A$  是 Hausdorff 空间。
2. 设  $f: X \rightarrow Y$  是商映射,  $B \subset Y$  是开集或闭集, 令  $A = f^{-1}(B)$ , 证明  $f|_A: A \rightarrow B$  是商映射。
3. 定义  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{E}^4$  为

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

证明  $f(S^2) \cong \mathbb{RP}^2$ 。这是射影空间在四维欧氏空间中的嵌入。

4. 记  $p: \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1/(0, 1]$  为粘合映射,
  - (a) 证明  $p$  既不是开映射, 也不是闭映射。
  - (b) 记  $A = \mathbb{E}^1 \setminus (0, 1]$ , 证明  $p_A: A \rightarrow p(A)$  不是商映射。
5. 证明紧致流形满足  $C_2$  公理。
6. 证明紧致流形是可度量化的。
7. 证明流形是局部道路连通和局部紧致的。
8. 如果在环面上去掉一个圆盘的内部, 然后把对径点粘合, 所得到的曲面是什么类型? 说明你的结论。
9. 如果在 Klein 瓶去掉一个圆盘的内部, 然后把对径点粘合, 所得到的曲面是什么类型? 说明你的结论。

(以上两题说明  $T^2 + \mathbb{RP}^2 = K + \mathbb{RP}^2$ , 但此加法不满足消去律……)

10. 设  $A$  和  $B$  是拓扑群  $G$  的紧致子集, 证明集合  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$  紧致。
11. 根据曲面的多边形表示判断闭曲面类型:

$$(a) abacb^{-1}dcd, \quad (b) abca^{-1}cdeb^{-1}fedf.$$