

## 基础拓扑学, 2018 年秋

### 作业 1

上交时间: 10 月 10 日

1. 一个多面体称为正则的 (或者正多面体), 如果它的每个面具有同样多的边, 并且每个顶点处有同样多的边。

(a) 设  $P$  是个正则的凸多面体, 每个面有  $p$  条边, 每个顶点处有  $q$  条边, 用欧拉公式证明

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e},$$

这里  $e$  是  $p$  的边数。

(b) 证明有且只有五种正多面体, 并且画出其中的三个。

2. 证明实数上所有形如  $(a, \infty)$  和  $[a, \infty)$  的集合 ( $a \in \mathbb{R}$ ), 与全集  $\mathbb{R}$  和空集  $\emptyset$  给出实数  $\mathbb{R}$  上的一个拓扑。进一步地, 证明在该拓扑之下, 一个函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是连续的, 当且仅当  $f$  是递增函数, 也就是说, 当  $x \geq y$  时有  $f(x) \geq f(y)$ 。

3. 构造某个空间 (例如  $\mathbb{R}$ ) 上两个不可比较的拓扑。

4. 设  $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的单位实心球。明确写出下面空间之间的同胚

(a)  $D^n$  与  $\mathbb{R}^n$ 。

(b)  $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$  与  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D^n}$  这里  $O$  是原点。

5. 在这个问题里我们将给出素数有无穷多个的拓扑证明。(一个大于 1 的自然数称为素数, 如果它只能被 1 和自身整除。)

(a) 考虑所有的算术数列集合

$$S_{a,b} = a + b\mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

用这些集合  $S_{a,b}$  构造  $\mathbb{Z}$  上的一个拓扑, 证明他们满足拓扑公理。证明每个集合  $S_{a,b}$  既是开集又是闭集。

(b) 证明  $\{\pm 1\}$  是闭集。

(c) 证明如果仅有有限多个素数, 那么集合  $\{\pm 1\}$  是开集。证明集合  $\{\pm 1\}$  不是开集, 从而素数有无穷多个。

6. 沿莫比乌斯带的中心圆周剪开, 会得到什么空间? 沿距离边界三分之一 (宽度) 的圆周呢?

7. 一个映射  $f: X \rightarrow Y$  称为开 (闭) 映射, 如果  $X$  中开 (闭) 集的像集是  $Y$  中的开集 (闭集)。

(a) 构造不是闭映射的开映射的例子, 和不是开映射的闭映射的例子。

(b) 假设映射  $f: X \rightarrow Y$  是一一的满射, 证明下列条件等价

i.  $f$  是开映射。

ii.  $f$  是闭映射。

iii.  $f^{-1}$  连续。