

同伦论, 2017 年春季

作业 3

上交时间: 5 月 22 日

1. 证明存在映射 $f: \mathbb{RP}^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$, 使得 f 在同调上的诱导同态平凡, 但在上同调上的诱导同态不平凡 (证明之)。
2. 给定 S^1 上从 $\mathbb{C}$ 上乘积而来的群结构。证明对任意 CW 复形 X , S^1 的群结构诱导了 $\langle X, S^1 \rangle$ 上的群结构, 并且定理 4.57 给出的一一映射是群同构。
3. 给定交换群 G 和 H , 以及 CW 复形 $K(G, n)$ 和 $K(H, n)$, 证明映射

$$\langle K(G, n), K(H, n) \rangle \rightarrow \text{Hom}(G, H), \quad [f] \mapsto (f_* : \pi_n(K(G, n)) \rightarrow \pi_n(K(H, n)))$$

是一一映射。

4. 设 X 是 n 维 CW 复形, 证明 $[X, S^n] \cong H^n(X; \mathbb{Z})$ 。
5. 证明映射 $p: E \rightarrow B$ 是纤维化当且仅当 $\pi: E^{[0,1]} \rightarrow E_p, \pi(\gamma) = (\gamma(0), p \circ \gamma)$ 有截面, 即, 存在映射 $s: E_p \rightarrow E^{[0,1]}$ 使得 $p \circ s = \text{id}_{E_p}$ 。
6. 给定纤维化 $F \rightarrow E \rightarrow B$, 用同伦提升性质定义 $\pi_1(E)$ 在 $\pi_n(F)$ 上的作用, 即同态 $\pi_1(E) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(F))$, 使得 $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(F))$ 是 $\pi_1(F)$ 在 $\pi_n(F)$ 上的作用 (定义同伦群时给出)。
7. 给定映射 $f: A \rightarrow B$ 和同伦等价 $g: C \rightarrow A$, 证明纤维化 $E_f \rightarrow B$ 和 $E_{fg} \rightarrow B$ 是纤维同伦等价的。
8. 如果纤维化 $p: E \rightarrow B$ 是同伦等价, 证明 p 和平凡纤维化 $\text{id}: B \rightarrow B$ 是纤维同伦等价的。