同伦论, 2017 年春季

作业 3

上交时间：4 月 24 日

1. 设 CW 复形 X 由 $S^1 \vee S^n (n > 1)$ 上粘贴一个 $(n+1)$ 维胞腔 e^{n+1} 得到，粘合映射由多项式 $p(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \cong \pi_n(S^1 \vee S^n)$ 给出，于是 $\pi_n(X) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(p(t))$。证明 $\pi_n'(X)$ 是循环群，并通过 $p(t)$ 确定该群的阶数。
2. 证明单连通的闭三维流行与 S^3 同伦等价。
3. 如果 CW 复形 X 是 $K(G, 1)$ 空间，证明 $\pi_n(X^n)$ 对 $n \geqslant 2$ 是自由交换群。
4. 如果 X 是 $(n-1)$ 连通的 CW 复形，证明 Hurewicz 同态 $h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ 当 $n > 1$ 时是满射，当 $n = 1$ 时，证明有同构
$$H_2(X)/h(\pi_2(X)) \cong H_2(K(\pi_1(X), 1))$$
5. 设 X 是连通的有限维 CW 复形，万有复叠为 $\widetilde{X}$，证明 X 与 $\widetilde{X} \times K(\pi_1(X), 1)$ 具有同构的同伦群；如果 $pi_1(X)$ 有有限阶元素，证明它们不同伦等价。
6. 设 $S^k \to S^m \to S^n$ 是纤维丛，证明 $k = n-1$，$m = 2n-1$。
7. 证明 $\pi_3(S^1 \vee S^2)$ 不是有限生成的 $\mathbb{Z}[\pi_1(S^1 \vee S^2)]$-模。推广到 $\pi_{i+j-1}(S^1 \vee S^i \vee S^k)$（设 $i, j > 1$）。