数学分析 I, 2017 年秋季

作业 12

上交时间及方式：2017.12.11 习题课

目标：函数的凸凹性、渐近线，函数作图与方程求根。

1. 设函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的凸函数，求证：

   (a) 对 $\forall x_0 \in (a,b)$，左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在，从而 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

   (b) 对 $\forall x_0 \in (a,b)$，$f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$

   (c) 左导函数 $f'_-(x)$ 和右导函数 $f'_+(x)$ 在 (a,b) 内单调上升。

2. 设函数 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的凸函数，求证：对 $\forall x_0 \in (a,b)$，存在 $m \in \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0)\right]$，使得

$$f(x) \geqslant f(x_0) + m(x - x_0), \qquad \forall x \in (a,b)$$

3. 作下列函数的图形

$$(a)\ y = \sin^3 x + \cos^3 x, \qquad (b)\ y = \sqrt[3]{x}e^{-x}$$

4. 对常数 $\lambda \in \mathbb{R}$，求方程

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{3\sqrt{3}}{\cos x} = \lambda$$

   在区间 $[0, 2\pi]$ 上的实根个数。

5. 用牛顿法求方程 $x^3 - 2 = 0$ 的正根。已知 $x_1 = 2$，迭代 6 次，计算到 x_6。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 上可导，$f(x_0) = 0$，并存在常数 α，使得

$$q = \sup_{|x - x_0| < \delta} |1 - \alpha f'(x)| < 1$$

   求证：对任意 $x_1 \in U(x_0, \delta)$，由公式 $x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n)$ 确定的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0。

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导，且为凸函数，满足

$$f(x) = x^2 + x^2 \cdot \varepsilon(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

   求证：

   (a) 对 $\forall h \in \left(0, \dfrac{x}{2}\right)$，有 $\dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$。

   (b) 对 $\forall \eta > 0$，存在 $M > 0$，使当 $x > M$ 时，对 $\forall h \in \left(0, \dfrac{x}{2}\right)$ 有

$$2x - h - \frac{\eta}{h}x^2 \leqslant f'(x) \leqslant 2x + h + \frac{\eta}{h}x^2$$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 1$。

   (d) 若 $f(x)$ 可导，但不是凸函数，那么由 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 能否得出 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = 1$?

8. 对自然数 $n \in \mathbb{R}$，给定方程 $x^n + x = 1$，求证：

   (a) 在 $x > 0$ 上方程有唯一解 x_n。

   (b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$。

   (c) 当 $n \to +\infty$ 时，有 $1 - x_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$。