数学分析 I, 2017 年秋季

作业 11

上交时间及方式：2017.12.04 习题课

目标：泰勒公式、函数的单调性与极值

1. 写出下列函数在 $x=0$ 的泰勒公式至指定的阶数

$$(a)\ \ln(\cos x+\sin x) \quad (x^4) \qquad (b)\ \frac{x}{2x^2+x-1} \quad (x^4)$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上有 $(n-1)$ 阶导数，在 x_0 处有 n 阶导数，并且

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0, \qquad f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

求证：当 $0<|h|<\delta$ 时，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h) \qquad 且 \qquad \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，并且 $f'(a)=f'(b)=0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次可导，且对 $\forall x>0$ 有

$$|f(x)|\leqslant M_0, \qquad |f''(x)|\leqslant M_2$$

求证：对 $\forall x>0$，有

$$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{M_0,M_2}$$

并举例说明上述不等式无法改进。

5. 求证下列不等式

$$(a)\ \sin x+\cos x>1+x-x^2 \quad (x>0) \qquad (b)\ \ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x} \quad (x\geqslant 0)$$

6. 求证：方程 $f(x)=\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\ln x-\ln 2+\ln(1+x^2)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且只有一个实根。

7. 设 $u>e$，设 $x(u)$ 是方程 $x\ln x=u$ 的根
   (a) 求证：$x(u)\sim\dfrac{u}{\ln u}$ $(u\to+\infty)$
   (b) 求 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x>1$ 上的最大值。
   (c) 求证：$\dfrac{u}{\ln u}\leqslant x(u)\leqslant\left(1+\dfrac{1}{e}\right)\dfrac{u}{\ln u}$。

8. 设

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

求证：

   (a) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大点。
   (b) 在 $x=0$ 的任意小邻域内，$f(x)$ 在 $x=0$ 的右侧不单调下降，在 $x=0$ 左侧不单调上升。