数学分析 I, 2017 年秋季

作业 10

上交时间及方式：2017.11.27 习题课

1. 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$，求证：方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

在 $(0,1)$ 间至少有一个根。

2. 求证：勒让德多项式

$$P_n=\frac{1}{2^n n\,!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$$

在 $[-1,1]$ 内有 n 个零点。

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且 $f'(x)$ 单调，求证：$f'(x)$ 在 (a,b) 上连续。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|\quad \forall\, x,y\in[a,b], k\text{为常数}$$

的充要条件是函数 $e^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上满足李普希兹条件

$$\left|e^{f(x)}-e^{f(y)}\right|\leqslant k'\,|x-y|\quad \forall\, x,y\in[a,b], k'\text{为常数}$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(a>0)$，在 (a,b) 上可微，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，求证：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，并且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=\ell$$

这里 $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$。求证：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$$

8. 求极限

$$(a)\ \lim_{x\to0+0}\left(\frac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(c)\ \lim_{x\to0}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)\qquad (d)\ \lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$$