

数学分析 I, 2017 年秋季

作业 9

上交时间及方式: 2017.11.20 习题课

1. 求证: 由椭圆一个焦点出发的射线经椭圆反射后, 一定经过椭圆的另一个焦点。
2. 求证: 函数在点 x_0 处可微的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可以写成

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续。此条件称为导数的 Carathéodory 定义。

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 并且存在极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$$

求证: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并且 $f'(0) = A$ 。

4. 求证: 切比雪夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

满足方程

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0$$

5. 求

$$(a) \, d \left(\arccos \frac{1}{|x|} \right) \quad (b) \, \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} \quad (c) \, \frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad (d) \, d \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)$$

6. 证明公式

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0)$$

7. 对 $m \in \mathbb{N}$, 求 $f^{(n)}(0)$

$$(a) \, f(x) = \cos(m \arcsin x), \quad (b) \, f(x) = \sin(m \arcsin x)$$

8. 对函数 $f(x) = \sqrt{a^2 + x}$, 设 $a > 0$,

(a) 证明近似公式 $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$, 其中 $|x| \ll a$ 。

(b) 近似计算 (a) $\sqrt{5}$, (b) $\sqrt{34}$, (c) $\sqrt{120}$, 并与真实值相比较。

(c) 设 $x > 0$, 证明公式 $\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r$, 其中 $0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$