数学分析 I, 2017 年秋季

作业 8

上交时间及方式：2017.11.13 习题课

1. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right],\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

2. 求导数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$$

$$y=\frac{\sin x}{x}$$

$$y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$y=\tan x-\frac{1}{3}\tan^2 x+\frac{1}{5}\tan^3 x$$

3. 求导数

$$y=a^{\sin x}$$

$$y=x^{x^x}$$

$$y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\ (a>0)$$

4. 求证：极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^b}{x-a}=e^bA$$

5. 设 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$，
   (a) 当 n 为偶数时，求证 $f(x)$ 在实数轴上有正的最小值。
   (b) 当 n 为奇数时，求证 $f(x)$ 有且只有一个实根。

6. 设函数 $f(x)\in\mathcal{C}[a,b]$，并且只有一个极值点 x_0，求证：若 x_0 是极大点必是最大点，若 x_0 是极小点必是最小点。

7. 确定常数 α，使得如下函数处处可导

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

8. 设 $a>0,b>0$，求如下方程有两个不同正实根的条件

$$e^{bx}=ax^2,\qquad e^{bx^2}=ax^2$$