

数学分析 I, 2017 年秋季

作业 7

上交时间及方式: 2017.11.06 习题课

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

2. 设 $T > 0$ 为常数, 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义, 满足

(a) $g(x+T) > g(x), x \in [a, +\infty)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 但对 $\forall M \in [a, +\infty)$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, M]$ 上有界。

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = \ell$

求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

3. 设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的函数, 对 $\delta > 0$, 定义

$$\omega_f(\delta) = \sup \{ |f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in (a, b), |x_1 - x_2| < \delta \}$$

求证: 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上一致连续的充要条件是

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega_f(\delta) = 0$$

4. 2013 年, 短跑运动员张培萌在莫斯科田径世锦赛的半决赛中, 以 10 秒创造了新的全国百米纪录, 求证: 有一段 10 米的路程, 张培萌恰好用了 1 秒完成。

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

求证: $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。

6. 设函数 $f(x) \in \mathcal{C}(0, +\infty)$, 满足对 $\forall x_0 \in (0, +\infty)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx_0) = 0$$

求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增, 满足

$$f(a) > a, \quad f(b) < b$$

求证: f 在 $[a, b]$ 上有不动点, 即存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续有界, 求证: 对 $\forall \lambda > 0$, 存在数列 $\{x_n\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n + \lambda) - f(x_n)] = 0$$