

数学分析 I, 2017 年秋季

作业 5

上交时间及方式: 2017.10.23 习题课

1. 给定序列 $\{x_n\}$, 设对任意自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ 有

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$$

求证序列 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 收敛。

2. 用肯定的语气叙述

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 不存在有限极限}$$

3. 用极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ 。

4. 求下列极限

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt[3]{t} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

5. 求下列极限

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} \quad (m, n \text{ 为整数}, n \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(n \arccos x)}{x} \quad (n \text{ 为奇数})$$

6. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$$

7. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x \right)$$

8. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上定义, 并且在每一有限区间 (a, b) 上有界, 如果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$$

求证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$