

## 数学分析 I, 2017 年秋季

### 作业 4

#### 上交时间及方式: 2017.10.16 习题课

1. 用肯定的语气叙述序列  $\{a_n\}$  不是柯西序列。

2. 设  $0 < \lambda < 1$ , 序列  $\{a_n\}$  收敛于  $\alpha$ , 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{\alpha}{1 - \lambda}$$

3. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$$

4. 用确界存在定理证明聚点原理。

5. 证明如下序列收敛

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

6. 设正实数序列  $\{a_n\}$  满足

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

证明序列  $\{a_n\}$  收敛。

7. 设序列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足

$$a_{n+1} = b_n + qa_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

这里  $q \in (0, 1)$ 。证明序列  $\{a_n\}$  收敛的充分必要条件是序列  $\{b_n\}$  收敛。

8. 证明序列

$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7}}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}}}, \dots$$

收敛, 并且求其极限。