数学分析 I, 2017 年秋季

作业 3

上交时间及方式: 2017.10.09 习题课

1. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$$

2. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}} \quad (a > 0)$$

3. 设 $0 < a_1 < b_1$, 令

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

证明序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛且其极限相等。

4. 设 $\{b_n\}$ 是单调递增趋于 $+\infty$ 的序列, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \alpha$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ 。(Stolz 定理)

5. 求下列序列的极限

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

6. 求下列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

7. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

8. 设序列 $\{a_n\}$ 满足下列条件

$$0 < a_n < 1, \quad (1 - a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$$

求证序列 $\{a_n\}$ 单调上升, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ 。