

数学分析 I, 2017 年秋季

作业 2

上交时间及方式: 2017.09.25 习题课

1. 设 $f(x)$ 定义在数集 E 上, 证明: $f(x)$ 在 E 上严格单调的充分必要条件是对 $\forall x_1, x_2, x_3 \in E$, 若 $x_1 < x_2 < x_3$, 则

$$(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) > 0$$

2. 设 $f(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x < 1$)。

- (a) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-1, 1)$ 上, 使其成为偶函数;
- (b) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 使其成为周期为 2 的奇函数。

3. 用肯定语气叙述: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上,

- (a) $f(x)$ 不是奇函数;
- (b) $f(x)$ 不是周期函数;
- (c) $f(x)$ 不是单调上升函数;
- (d) $f(x)$ 不是单调函数。

4. 若 $f(x)$ 在实轴上定义, 且 $f(f(x)) \equiv x$ 。

- (a) 这样的函数 $f(x)$ 有几个? 描述一下这种函数。
- (b) 如果 $f(x)$ 在实轴上严格上升, 这种函数有几个?

5. 用 $\varepsilon - N$ 方法验证

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^3 + 2} = 0$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 q^n = 0$ ($|q| < 1$);
- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n!} = 0$;

6. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$ 。

7. 满足下面条件的序列 $\{x_n\}$ 各有什么性质?

- (a) $\forall N > 0, \exists \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$;
- (b) $\exists N > 0, \forall \varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 。

8. 证明 $\{\cos n\}$ 的极限不存在。