

数学分析 I, 2017 年秋季

作业 1

上交时间及方式: 2017.09.18 习题课

1. 用数学归纳法证明

$$|\sin nx| \leq n |\sin x| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. 求证

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. 解不等式

$$(1) |x+2| > 5 \quad (2) |x-5| < |x+1|$$

4. 设 $a, b > 0$, $0 < p < 1$ 时, 证明 $a^p + b^p \geq (a+b)^p$ 。 (a, b, p 均为实数)

5. 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

(a) 求 $f(1)$, $f(f(1))$, $f(f(f(1)))$ 。

(b) 求 $f(\sqrt{2})$ 。

(c) 求证 $|f^2(x) - 2| < |x^2 - 2|$, $\forall x > 0$ ($x \neq \sqrt{2}$)。

6. 求函数 $y = \sqrt{x-x^2}$ 的定义域和值域。

7. 作函数 $y = |x-a| + \frac{1}{2}|x-b|$ ($a < b$) 的图像。

8. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$2f(x) + f(1-x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

求 $f(x)$ 的表达式。

- 9* 设 α 是一个戴德金分划, 令

$$0^* = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0\}, \quad \beta = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists s \in \mathbb{Q} \text{ 使得 } s > q \text{ 且 } \forall p \in \alpha, p + s < 0\}$$

证明 $\alpha + \beta = 0^*$ 。

(带 * 的题目不计成绩)