

基础拓扑学, 2015 年秋

作业 5

上交时间: 12 月 14 日

1. 拓扑学家的梳子定义为如下空间

$$X = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = 0 \text{ 或 } y = 0 \text{ 或对某个 } n \in \mathbb{N} \text{ 有 } x = \frac{1}{n} \right\}$$

证明 X 可以形变收缩到 X 中任何一点, X 可以强形变收缩到 $(x, 0)$ 或 $(\frac{1}{n}, y)$, 但不能强形变收缩到 $(0, y)$ ($y > 0$)。

2. 对于 \mathbb{E}^2 中一点 x_0 和它的邻域 U , 证明 $U \setminus \{x_0\}$ 不单连通。
3. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个同伦等价, 证明 f 的所有同伦逆构成 Y 到 X 的一个映射类。
4. 证明从 Möbius 带 X 的边界到 X 的含入映射诱导的基本群的同态不是同构。
5. 证明下列空间相互同伦等价
- (a) 球面 S^2 与一条直径的并。
 - (b) 在环面的一个纬圆上粘接一个圆盘。
 - (c) 球面 S^2 与圆周的一点并。
6. 证明 \mathbb{E}^2 与 \mathbb{E}^3 不同胚。
7. 计算下列空间的基本群 (必须写明计算过程)
- (a) T^2 中去掉三个点。
 - (b) \mathbb{E}^3 中去掉 3 条坐标轴。
 - (c) \mathbb{E}^3 中去掉 2 条不相交的直线。
8. 设 $f: D^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 是连续映射, 证明在下列条件之一成立时, f 均有不动点
- (a) $f(S^1) \subset D^2$;
 - (b) 对任意 $x \in S^1$, $f(x)$ 、 x 与原点不共线;
 - (c) 对任意 $x \in S^1$, 线段 $\overline{xf(x)}$ 过原点。
9. 记 S_i^2 是 \mathbb{E}^3 中以 $(i, 0, 0)$ 为球心的半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面, 令 $X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i^2$ 。证明 X 单连通。