基础拓扑学, 2015 年秋

作业 4

上交时间：11 月 30 日

1. 证明一个从圆周到圆周的映射如果与恒同映射不同伦，则必有不动点。
2. 证明从拓扑空间 X 到 Y 的映射零伦当且仅当它可以扩张为从 X 上的锥形到 Y 的映射。
3. 设 $f: X \to Y$ 是连续映射，ω 为连接 X 中点 x_0 到 x_1 的道路类。证明

$$(f \circ \omega)_\# \circ f_* = f_* \circ \omega_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_1))$$

   换而言之，下面的图表交换

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\omega_\#"] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "(f\circ\omega)_\#"] \\
\pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(Y,f(x_1))
\end{tikzcd}$$

4. 设空间 X 道路连通，取基点 x_0 和 x_1，任何从 x_0 到 x_1 的道路 ω 给出同构

$$\omega_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

   证明 $\omega_\#$ 不依赖于 ω 的选取当且仅当 $\pi_1(X, x_0)$ 是交换群。
5. 设映射 $f: S^1 \to S^1$ 定义为 $f(z) = z^n$（$n \in \mathbb{Z}$），描述同态 $f_*: \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$。
6. 设 A 是空间 X 的道路连通子空间，取基点 $x_0 \in A$，证明含入映射 $A \hookrightarrow X$ 诱导的同态 $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是满同态当且仅当 X 中的每条端点在 A 中的道路可以定端同伦到 A 中的道路。
7. 定义映射

$$f: S^1 \times [0,1] \to S^1, \qquad f(\theta, s) = (\theta + 2\pi s, s)$$

   证明：

   (a) f 可以相对于 $S^1 \times \{0\}$ 或者 $S^1 \times \{1\}$ 同伦于恒同映射。

   (b) f 不可能相对于 $S^1 \times \{0, 1\}$ 同伦于恒同映射。