

基础拓扑学, 2015 年秋

作业 2

上交时间: 10 月 19 日

- 证明拓扑空间 X 的一些子集的集合 $\mathcal{B}$ 是 X 上某个拓扑的拓扑基当且仅当 $\mathcal{B}$ 满足下列两个条件
 - $\mathcal{B}$ 中所有集合的并给出 X ,
 - 如果 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 则对任意 $x \in B_1 \cap B_2$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.
- 一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为开 (闭) 映射, 如果 X 中开 (闭) 集的像集是 Y 中的开集 (闭集).
 - 构造不是闭映射的开映射的例子, 和不是开映射的闭映射的例子.
 - 假设映射 $f: X \rightarrow Y$ 是一一的满射, 证明下列条件等价
 - f 是开映射.
 - f 是闭映射.
 - f^{-1} 连续.
- 证明 Hausdorff 空间和可数空间的些列性质:
 - Hausdorff 空间的子集是 Hausdorff 的, Hausdorff 空间的乘积也是 Hausdorff 的.
 - 子集 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ 称为 $X \times X$ 的对角线. 证明 X 是 Hausdorff 空间, 如果 Δ 是 $X \times X$ 的比自己.
 - 令 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$. 证明 $\mathcal{B}$ 所生成的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑不是第二可数的.
- 证明度量空间的任意闭子集都是可数多个开集的交.
- 设 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的单位球面. 设 X 是度量空间, A 是 X 的闭子集. 证明任意连续函数 $f: A \rightarrow S^n$ 可以延拓到 A 的一个开邻域, 即延拓到 X 中某个包含 A 的开子集.
- 设 $\mathcal{C}$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上所有连续函数的集合. 我们定义如下两个距离

$$d_1(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

$$d_2(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|$$

证明 d_1 和 d_2 都给出了 $\mathcal{C}$ 上的度量. 证明 $(\mathcal{C}, d_1)$ 是完备的, 但 $(\mathcal{C}, d_2)$ 不是完备的. 给出 $(\mathcal{C}, d_2)$ 上不收敛的柯西列.

- 记 S 为所有无理数的集合, 在 $\mathbb{R}$ 上, 定义 $\mathcal{T}$ 为所有形如 $U \setminus A$ 的子集组成的集合, 其中 U 为 $\mathbb{R}^1$ 中的开集, A 是 S 的子集. 证明 $\mathcal{T}$ 给出了 $\mathbb{R}$ 上可分但并不第二可数的拓扑.