

基础拓扑学, 2015 年秋

作业 1

上交时间: 9 月 28 日

1. 一个多面体称为正则的 (或者正多面体), 如果它的每个面具有同样多的边, 并且每个顶点处有同样多的边。

(a) 设 P 是个正则的凸多面体, 每个面有 p 条边, 每个顶点处有 q 条边, 用欧拉公式证明

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e},$$

这里 e 是 p 的边数。

(b) 证明有且只有五种正多面体, 并且画出其中的三个。

2. (a) 证明实数上所有形如 (a, ∞) 和 $[a, \infty)$ 的集合 ($a \in \mathbb{R}$), 与全集 $\mathbb{R}$ 和空集 $\emptyset$ 给出实数 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑。进一步地, 证明在该拓扑之下, 一个函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 当且仅当 f 是递增函数, 也就是说, 当 $x \geq y$ 时有 $f(x) \geq f(y)$ 。

(b) 构造某个空间 (例如 $\mathbb{R}$) 上两个不可比较的拓扑。

3. 设 $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位实心球。明确写出下面空间之间的同胚

(a) D^n 与 $\mathbb{R}^n$ 。

(b) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ 与 $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D^n}$ 这里 O 是原点。

4. 在这个问题里我们将给出素数有无穷多个的拓扑证明。(一个自然数称为素数, 如果它只能被 1 和自身整除。)

(a) 考虑所有的算术数列集合

$$S_{a,b} = a + b\mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

用这些集合 $S_{a,b}$ 构造 $\mathbb{Z}$ 上的一个拓扑, 证明他们满足拓扑公理。证明每个集合 $S_{a,b}$ 既是开集又是闭集。

(b) 证明 $\{\pm 1\}$ 是闭集。

(c) (选) 证明如果仅有有限多个素数, 那么集合 $\{\pm 1\}$ 是开集。证明集合 $\{\pm 1\}$ 不是开集, 从而素数有无穷多个。

5. 沿莫比乌斯带的中心圆周剪开, 会得到什么空间? 沿距离边界三分之一 (宽度) 的圆周呢?