从 Galois 理论谈起

李文威

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

邮箱: wwli@math.ac.cn

编译日期: 2015-11-15

目录

缘起

本文源于笔者 2014 年 12 月 12 日在山东大学泰山学堂 (济南市中心校区) 的一场同名报告，依据底稿敷衍成篇, 也不免继承了口述时的潦草风格.

Galois 理论可谓是本科阶段抽象代数课程的冠冕. 报告本意是和本科生闲聊一些和 Galois 理论相关, 然而常为初等教材所忽视的题材. 目的在于尝试阐述学科之间应有的交融互摄, 同时兼顾其直观源流, 而不在于陈述宏大的前沿理论, 后一种训练有时候过犹不及. 很显然, 这份成品远远达不到上述期望; 许多段落的叙述过于草率, 理应大开大阖之处又无所施展. 这既是客观框架的約束, 也是笔者个人学识所限, 只能原样呈現了.

既然从 Galois 理论谈起, 以下将假设一定程度的本科生代数背景, 标准教材如 [11] 的主干部分已经绰绰有余. 不过我们很快就会跨越代数学的边界, 或者毋宁这么说: 所谓 "边界" 也是本无所谓有, 无所谓无的.

1 域论回顾

Galois 理论的现代表述建基于域论语言, 后者由 E. Steinitz 在 20 世纪初建立. 相关理论可见诸任一代数学教本, 如 [11]. 我们简单回顾若干基本概念如下.

- *域*是具有加, 减, 乘, 除 (分母非零) 四则运算的代数结构, 满足结合律, 分配律和交换律等性质; 注意到这里我们要求乘法顺序可交换: $xy = yx$. 换言之, 一个域 $(F, +, \cdot)$ 无非是一个所有非零元皆可逆的交换环; 这里假设所有环皆含乘法单位元 1. 我们沿用以下标准的符号: $\mathbb{Q}$ (有理数域) , $\mathbb{R}$ (实数域) , $\mathbb{C}$ (复数域) .
- 域 F 上以 X 为变元的的多项式环记为 $F[X]$, 有理函数域记为 $F(X)$, 准此可以定义多变元的情形, 如 $F[X, Y]$ 等.
- 若 F 为 E 的子域 (即: F 对 E 中的 $+, -, \cdot$ 及取逆运算封闭) , 则称 E 为 F 的扩张或扩域, 也记为 E/F.
- 设 E, F 为域, 任意环同态 $\phi : F \to E$ 都是单同态, 此时也称同态 ϕ 为域的嵌入, 其象 $\phi(F)$ 是 E 的子域.
- 域扩张 E/F 的次数 $[E : F]$ 定义为 $\dim_F E$, 这里 E 透过乘法运算成为 F-向量空间.
- 承上, 若对 $\alpha \in E$ 存在 F-多项式环 $F[X]$ 中的非零元 Q 使得 $Q(\alpha) = 0$, 则称 α 在 F 上是代数的: 它是多项式 Q 的根. 此时存在不可约多项式 $P \in F[X]$ 使得

$$\{Q \in F[X] : Q(\alpha) = 0\} = (P) := P \cdot F[X],$$

  称之为 α 的极小多项式; P 在至多差个 $F^\times$ 中的比例常数的意义下是唯一的. 若每个 $\alpha \in E$ 在 F 上都是代数的, 则称 E/F 为代数扩张.

从现代观点看, 经典的多项式根式解问题可归结为代数扩张的研究. 事实上, 给定任意 $P \in F[X]$, 我们总能够 "形式地" 构造域扩张 E/F 使得 P 在 E 中有根; 不妨假设 P 在 F 上不可约, 这里的办法是形式地添入一个根: 考虑商环 $F[X]/(P)$ 和同态

$$\begin{tikzcd} c + (P) \arrow[r, phantom, "\in"] & E := F[X]/(P) \\ c \arrow[u, mapsto] \arrow[r, phantom, "\in"] & F \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

可证明 E 是域, 不妨视之为 F 的扩域; 可证明陪集 $\alpha := X + (P) \in E$ 满足 $P(\alpha) = 0$, 而且 $[E : F] = \deg P$. 反复操作便能得到充分大的有限扩张 L/F, 使得

- P 在 L 上分解为一次因子的积,
- L 作为 F 的扩域由 P 的所有根生成.

这样的 L/F 称为 P 的分裂域. 可以证明 P 的分裂域在至多差一个 F-同构的意义下唯一. 何谓 F-同构? 若 F 的扩域间的嵌入 $\phi : L \to L'$ 使图表

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\phi"] & & L' \\ & F \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

交换, 则称 ϕ 是 F-嵌入, 同理可定义 F-同构. 我们还可以进一步定义任一族多项式 $\{P_i \in F[X]\}_{i \in I}$ 的分裂域, 其中指标集 I 可以是无限集, 存在和唯一性仍然成立.

对于多项式根式解的研究, 最重要的情形是满足下述条件的域扩张 L/F

- L/F 正规, 亦即 L 是 F 上某一族多项式的分裂域;
- L/F 可分, 亦即对任意 $\alpha \in L$ 和 $P \in F[X]$ 使得 $P(\alpha) = 0$ 者, P 无重根.

这样的扩张称为 *Galois 扩张*, 相应的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 定为

$$\mathrm{Gal}(L/F) := \{F\text{-自同构 } L \to L\},$$

其中的群运算是自同构的合成.

留意到对于任意 $P \in F[X]$, 群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 重排 P 在 L 中的根, 这是因为对任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)$ 和 $\alpha \in L$,

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\sigma(\alpha)) = \sigma(P(\alpha)) = 0.$$

当 L 是多项式 P 的分裂域时, 这个重排作用实际将 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 嵌入为 $\{P \text{ 的根的所有排列}\}$ 的子群. 于是我们接上了 Galois 的初衷:

$$\text{Galois 群} \approx \text{根的对称}$$

Galois 关于根式解的定理可表述如下.

定理 1.1 设 $P \in F[X]$ 为不可约多项式, 并取其分裂域 L, 则 $P(X) = 0$ 的解能表为根式当且仅当 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 为可解群.

这个结果至少有两种用法.

- 一是研究特定方程有无根式解. 例如 $P(X) = X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ 的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 同构于对称群 $\mathfrak{S}_3$, 故不可解.
- 二是研究一般 n 次多项式 $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根有无公式解 (以根式表达), 这里表述 "一般" 系数的手法是将未定系数 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ 视为变元, 所以所论的多项式实则是 $P \in \Bbbk(a_0, \ldots, a_{n-1})$, 其中 $\Bbbk$ 是选定的基域而 $F := \Bbbk(a_0, \ldots, a_{n-1})$ 是 n 元有理函数域. 不难证明 P 在 F 上不可约, 而且此时 $\mathrm{Gal}(L/F) \simeq \mathfrak{S}_n$. 特别地, 五次以上多项式方程无一般的根式解.

2 Galois 对应

就抽象的, 结构性的层面观照, Galois 理论的核心是所谓的 Galois 对应如下.

定理 2.1 设 L/F 为 Galois 扩张, $[L : F] < \infty$; 置 $G := \mathrm{Gal}(L/F)$, 则有双射

$$\begin{aligned} \{H \subset G:\ \text{子群}\} &\longleftrightarrow \{F \subset E \subset L:\ \text{中间域}\} \\ H &\longmapsto L^H := \{\alpha \in L : \forall \sigma \in G,\ \sigma(\alpha) = \alpha\} \\ \mathrm{Gal}(L/E) &\longleftarrow E. \end{aligned}$$

此外, $H \lhd G$ 当且仅当 E/F 是 Galois 扩张.

注记 2.2 对于无穷 Galois 扩张 L/F, 映射 $E \mapsto \mathrm{Gal}(L/E)$ 是单射但不是满射. 处理无穷扩张的一种办法是赋予 $G = \mathrm{Gal}(L/F)$ 某种自然的拓扑群结构, 称为 Krull 拓扑; 当 $[L : F]$ 有限时 Krull 拓扑无非是离散拓扑. 一般情形的 Galois 对应给出双射

$$\begin{aligned} \{H \subset G:\ \text{闭子群}\} &\longleftrightarrow \{F \subset E \subset L:\ \text{中间域}\} \\ H &\longmapsto L^H \\ \mathrm{Gal}(L/E) &\longleftarrow E. \end{aligned}$$

一个貌异实同的办法是将 $\mathrm{Gal}(L/E)$ 作为*投射有限群*, 亦即有限群的投射极限

$$\mathrm{Gal}(L/E) = \varprojlim_{\substack{K/E:\mathrm{Galois} \\ [K:E]<\infty}} \mathrm{Gal}(K/E)$$

处理之. 投射化是运用范畴论的常见手法, 稍后讨论淡中范畴及其 Galois 群时还会遇到相似的构造.

3 应用: 作图问题

Galois 理论的另一个著名应用是经典的尺规作图问题. 我们先抛开工具来澄清作图的代数意义: 在平面上取定直角坐标系, 并取定单位长度 1. 粗略地说, 在平面上构作一个点相当于构作其坐标 (x, y); 等价的说法是构作相应的复数 $z := x + yi \in \mathbb{C}$. 因此构作角度相当于构作单位圆上的点.

这套理论一旦就位, 作图问题中 "直尺" 和 "圆规" 的功用都可以代数地刻画. 这方面标准的结果是:

1. 一个复数 α 可用尺规构作当且仅当存在一族域扩张

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

   使得 $[F_i : F_{i-1}] \leq 2$, 而且 $\alpha \in F_n$. 换言之, 尺规的作图能力不多不少恰好是解二次方程.

2. 正 n 边形可用尺规构作的充分必要条件是

$$n = 2^a p_1 \cdots p_r,$$

   其中 $a, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 而 $p_1, \ldots, p_r$ 是相异的 Fermat 素数. 这里称一个素数 p 为 Fermat 素数意谓着它可写成 $p = 2^{2^k} + 1$ 的形式.

举例来说, 正 17 边形可作, 而正 9 边形不可作. 正三角形当然可以构作, 由此可知尺规无法三等分角度 $\frac{2\pi}{3}$; 一般来说, 三等分角在代数上相当于解某类三次方程式 (提示: 运用 sin 或 cos 的三倍角公式) . 至今还有许多数学爱好者为这些作图题虚耗精力, 其中一些解法是错误的, 一些则缘于对尺规作图的界定有误.

古希腊学者之所以偏好直尺和圆规, 兴许有其哲学或实践中的根源, 有待数学史研究者进行严肃的探究. 然而数学家们很早就察觉到: 如果适当放宽对工具的限制, 例如容许带标记的直尺, 则三等分角亦可构作. 但这些变体总脱不开尺规作图的窠臼.

我们未必要继承古希腊文明的思想包袱. 一种格外有趣同时也为中国人熟悉的作图方法是*折纸*, 其数学面向的研究主要是日本人的工作 (日文: Origami = 折り紙) . 对于折纸的操作, 大家应该或多或少有直观的了解, 在此不作严谨的界说, 相关讨论详见 [1, §10.3]. 仿照之前手法, 我们可以探讨一个复数 α 能否由折纸来构作.

定理 3.1 *复数 $\alpha \in \mathbb{C}$ 可由折纸构作, 当且仅当存在一族域扩张*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

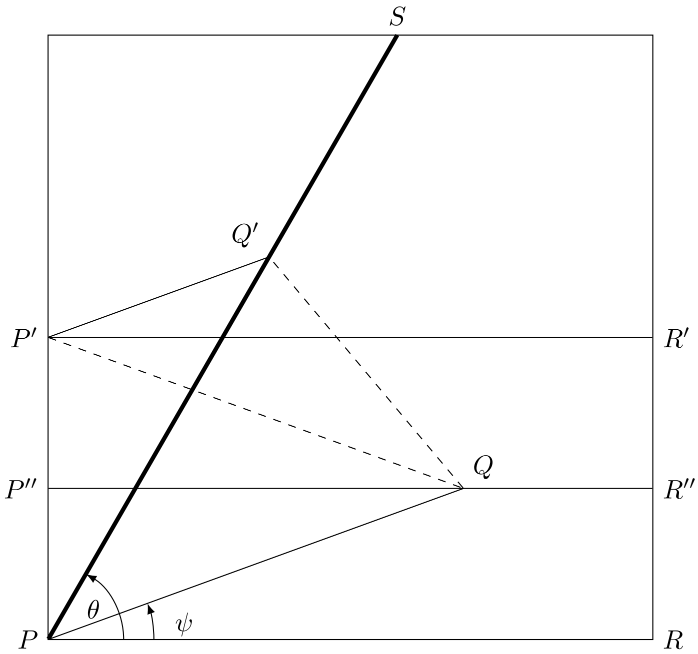
使得 $[F_i : F_{i-1}] \leq 3$, 而且 $\alpha \in F_n$.

根据之前关于三等分角的讨论, 立得以下结果.

推论 3.2 *可由折纸三等分任意角.*

以折纸三等分角有一套特别简单的作法, 不必迂回地动用三次方程, 据悉这是阿部恒在 1980 年提出的, 参见 [1, p.284]. 各位可以随手找一张纸头来实验. 给定角度 θ; 不失一般性可以假设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 我们在一张矩形的纸上 (如下图) 进行操作: 假定 θ 由下图的粗线 $\overline{PS}$ 张出.

1. 在纸上构作两条直线 $\overline{P'R'}$, $\overline{P''R''}$, 使其皆同矩形底边 $\overline{PR}$ 平行, 而且线段 $\overline{P'P''}$ 与 $\overline{P''P}$ 等长. 这一步容易用折纸完成: 将纸张对折两次即可.
2. 透过折纸手法, 将线段 $\overline{P'P}$ 向右上方折为线段 $\overline{Q'Q}$, 使得 Q' 落在粗线 $\overline{PS}$ 上而 Q 落在 $\overline{P''R''}$ 上.
3. 我们断言 $\psi := \angle QPR$ 即所求的 $\frac{\theta}{3}$.



证明 直观地看, 梯形 $P'Q'QP$ 相对于 "折痕" (即两线段 $\overline{P'Q'}$, $\overline{PQ}$ 中点的连线) 是对称的, 因而

$$\theta - \psi = \angle Q'PQ = \angle P'QP.$$

由构造易知 $\triangle P'QP$ 是等腰三角形, 故 $\angle P'QP'' = \angle P''QP$. 由平行线性质知 $\angle P''QP = \psi$. 综上可得

$$\theta - \psi = \angle P'QP = 2 \cdot \angle P''QP = 2\psi.$$

于是乎 $3\psi = \theta$, 明所欲证.

Galois 理论迄今仍有许多未解的大问题. 例如 Galois 逆问题: 是否对每个有限群 G 都存在 Galois 扩张 $L/\mathbb{Q}$, 使得 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq G$? 有兴趣的读者可以参看 [7].

4 拓扑学中的类比

我们接着看看拓扑学中的复叠空间理论, 这是标准的材料 (例如 [9, 第五章]). 为使这套理论有意义, 首先须择定一类 "合理的" 拓扑空间. 以下如不另作说明, 所谓空间皆指局部道路联通的拓扑空间.

定义 4.1 空间的连续映射 $q : X' \to X$ 如满足下述条件, 则称为复叠映射: X 有一族开覆盖 $X = \bigcup U$, 使得对每个 U 都存在集合 I 和交换图表

$$\begin{tikzcd} q^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "q"'] & & \bigsqcup_{i \in I} U \quad \text{无交并} \arrow[dl, "\text{自然映射}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

换言之, 映射 q 限制在每个 U 上是以 I 为纤维的平凡丛.

任意复叠 $q : X' \to X$ 满足*道路提升性质*: 对任何从 $x \in X$ 到 $y \in Y$ 的连续道路 $\gamma : [0,1] \to X$ 以及 $x' \in q^{-1}(x)$, 存在唯一的连续道路 $\gamma' : [0,1] \to X'$ 使得 $q \circ \gamma' = \gamma$ 且 $\gamma'(0) = x'$. 我们习惯形象地称集合 $q^{-1}(x)$ 为 x 上的纤维.

今后我们考虑的复叠映射 $q : X' \to X$ 的底空间 X 都假设为连通的. 以下是拓扑学中的一个基本结果.

定理 4.2 对任意连通空间 X 和 $x \in X$, 总存在复叠空间 $p : \tilde{X} \to X$ (称为 X 的泛复叠空间) , 满足于下述性质: 选定 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, 则:

对任意复叠 $q : Y \to X$ 和任意 $y \in q^{-1}(x)$, 存在唯一的连续映射 $\varphi : \tilde{X} \to Y$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

交换.

此外, 资料 $(\tilde{X}, \tilde{x})$ 满足唯一性: 对任两组满足上述条件的 $(\tilde{X}, \tilde{x})$, $(\tilde{X}', \tilde{x}')$, 存在唯一的同胚 $\varphi : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ 使得 $\varphi : \tilde{x}' \mapsto \tilde{x}$.

定理中的性质是范畴论中 “泛性质” 的绝佳例子, 唯一性不过是其形式的推论 (提示: 分别取 q 为 $\tilde{X} \to X$ 和 $\tilde{X}' \to X$, 用相应的 φ 构造所求同胚及其逆) .

对任意连续映射 $q : Y \to X$ 和 $q' : Y' \to X$, 我们可定义其间的态射为使下图交换的连续映射 φ:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & Y' \arrow[dl, "q'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

尽管含混, 不妨简记此态射集为 $\mathrm{Hom}_X(Y, Y')$. 当 $q = q'$ 时, 考虑可逆的态射 φ 就得到自同构群 $\mathrm{Aut}_X(Y)$; 倒转乘法顺序即得其相反群 $\mathrm{Aut}_X(Y)^{\mathrm{op}}$.

定义 4.3 设空间 X 连通. 对于任意 $x \in X$, 取定 $(\tilde{X}, \tilde{x})$ 如上. 则 X 对基点 x 的拓扑基本群定义为

$$\pi_1(X, x) := \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})^{\mathrm{op}}.$$

沿用以上符号, 仅需一些形式操作即可推出下述事实: 对任意覆叠映射 $q : Y \to X$, 存在双射

$$\begin{aligned} q^{-1}(x) &\xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, Y) \\ \varphi(\tilde{x}) &\longleftarrow\!\shortmid \varphi \end{aligned}$$

借此, $\pi_1(X, x)$ 在纤维集 $q^{-1}(x)$ 上有自然的 “左” 作用, 这是我们之所以取 $\mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ 的相反群的原因!

注记 4.4 一般拓扑书籍习惯用道路的接合定义基本群 $\pi_1(X,x)$, 最后证明它同构于泛覆叠的自同构群. 篇幅所限, 本文不解释这一进路.

我们再留意到基本群定义的另一个形式推论.

命题 4.5 *存在自然的双射*

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \\
\Big\downarrow 1{:}1 \\
\left\{ \underset{Y \xrightarrow{q} X:\ \text{覆叠}}{\text{双射族}\left(\varphi_Y : q^{-1}(x) \xrightarrow{1:1} q^{-1}(x)\right)} :\ \text{满足}
\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, two heads, "p"] \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\text{交换}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
q_1^{-1}(x) \arrow[r, "\varphi_{Y_1}"] \arrow[d, two heads] & q_1^{-1}(x) \arrow[d, two heads] \\
q^{-1}(x) \arrow[r, "\varphi_Y"'] & q^{-1}(x)
\end{tikzcd}
\text{交换} \right\}
\end{array}
$$

其中的映射 $q_1^{-1}(x) \twoheadrightarrow q^{-1}(x)$ 由 $p : Y_1 \twoheadrightarrow Y$ 诱导.

证明 诚然, 对于给定的 $q : Y \to X$, 任意 $\varphi \in \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ 给出 $\mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, Y)$ 到自身的映射, 因而给出 $q^{-1}(x)$ 到自身的映射 φ_Y. 当 $q : Y \to X$ 变动时易证 φ_Y 满足所欲的相容条件. 反过来说, 给定这么一族 φ_Y, 同理可知 $\varphi_{\tilde{X}}$ 给出一映射 $\mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, \tilde{X}) \to \mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, \tilde{X})$; 定义相应的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_X(\tilde{X})$ 为 $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$ 的像. 请读者证明上述的 $\varphi \leftrightarrow (\varphi_Y)_Y$ 是互逆的双射.

事实上, 以上勾勒的不外是范畴论里的米田引理的证明.

用我们即将铺陈的范畴语言来说, 以上命题可归结为: $\pi_1(X,x)^{\mathrm{op}}$ 是 "纤维函子 $[Y \xrightarrow{q} X] \mapsto q^{-1}(x)$ 的自同构群".

5 范畴语言

谈及范畴论的本科教材并不多, 这和范畴论在当代数学中的地位极不相称, 读者必要时可以参看 [12, 第 14 章].

本文中, 一个范畴 $\mathcal{C}$ 由两套资料构成:

- 由*对象*构成的类;
- 对任意两个对象 X, Y, 其间的*态射*构成一个集合, 记作 $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 其中的元素也称为*箭头* $f : X \to Y$.

此外需给定:

- 对任两个头尾相接的态射 $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$, 可构作其合成 $X \xrightarrow{g \circ f = gf} Z$. 态射的合成满足结合律.
- 对任意对象 X 存在恒等态射 $\mathrm{id}_X : X \to X$, 它由以下性质刻画: 对任意 $f : Y \to X$ 和 $g : X \to Y$ 皆有 $\mathrm{id}_X \circ f = f$ 和 $g \circ \mathrm{id}_X = g$.

由此可定义态射的可逆性: 若对 $f : X \to Y$ 存在 $g : Y \to X$ 使得 $fg = \mathrm{id}_X$, $gf = \mathrm{id}_Y$, 则称 f 是可逆的; 此时满足上述条件的 g 是唯一的, 记为 f^{-1} 并称作 f 的逆. 可逆态射也称作同构. 将 $\mathcal{C}$ 中箭头倒转, 对象不变, 得到的新范畴称为*相反范畴* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

子范畴 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ 的定义是显然的: 仅须要求 $\mathcal{C}'$ 的对象, 态射, 态射的合成和 id_X 都来自 $\mathcal{C}$. 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 对所有 $\mathcal{C}'$ 的对象 X, Y 恒成立, 则称 $\mathcal{C}'$ 是*满子范畴*.

例 5.1 请琢磨下表

范畴	对象	态射
Sets	集合	映射
R-**Mod**	左 R-模	模同态
$\mathrm{Cov}(X)$	覆叠空间 $q: X \to Y$	连续映射 $\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$ (交换图表)
$\Pi_1(X)$	点 $x \in X$	道路 $f: x \rightsquigarrow y$ 的同伦类

这里 R 为含单位元的交换环, 而 X 为空间.

须对最后一个例子略作说明. 所谓道路系指连续映射 $f: [0,1] \to X$ 使得 $f(0) = x$, $f(1) = y$, 其间的同伦要求保持端点不动. 任两条道路 $f: y \rightsquigarrow z$ 和 $g: x \rightsquigarrow y$ 的合成 $fg: x \rightsquigarrow z$ 定义为 "在时段 $[0, \frac{1}{2}]$ 先沿 g 从 x 走到 y, 在时段 $[\frac{1}{2}, 1]$ 再沿 g 从 y 走到 z". 不难验证道路的合成在同伦意义下满足结合律, 而且恒等态射 id_x 对应到常值道路 $[0,1] \to \{x\}$; 任意道路 f 之逆由其逆行 $t \mapsto f(1-t)$ 给出.

注意到 $\Pi_1(X)$ 中每个态射都可逆, 这样的范畴称为*广群*; 称 $\Pi_1(X)$ 为空间 X 的基本广群. 给定基点 $x \in X$, 在 $\Pi_1(X)$ 中的自同构群 $\mathrm{Hom}(x,x)$ 无非是由道路接合所定义的基本群 $\pi_1(X,x)$, 而 $\Pi_1(X)$ 蕴藏关于空间 X 的更丰富的信息.

定义 5.2 从范畴 $\mathcal{C}_1$ 到 $\mathcal{C}_2$ 的函子 F 意谓以下资料: 对象层次的映射 $X \mapsto FX$ 以及态射层次的映射 $[X \xrightarrow{f} Y] \mapsto [FX \xrightarrow{f} FY]$, 满足以下条件

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}, \quad \forall \text{对象} X,$$
$$Ff \circ Fg = F(f \circ g), \quad \forall \text{可合成的态射} f, g.$$

函子 F, G 间的态射 (又称为自然变换) $\varphi: F \to G$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{C}_2 \end{tikzcd}$$

定义为一族态射 $\varphi_X: FX \to GX$, 其中 X 取遍 $\mathcal{C}_1$ 中对象, 使得对每个 $\mathcal{C}_1$ 中态射 $f: X \to Y$ 下图皆交换.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & FY \arrow[d, "\varphi_Y"] \\ GX \arrow[r, "Gf"'] & GY \end{tikzcd}$$

函子及其间的态射 (自然变换) 具有显然的合成运算, 此外还能定义函子间态射的可逆性. 准此, 可以定义一个函子 F 的自同构群 $\mathrm{Aut}(F) := \{\varphi: F \to F \text{ 可逆}\}$.

现在可以着手联系前述的覆叠空间 (拓扑或几何学) 与 Galois 理论 (代数学).

1. 令 X 为空间. 考虑范畴 $\mathrm{Cov}(X)$, 选定基点 $x \in X$; 为了简化, 这里假设 X 连通. 定义纤维函子

$$\mathrm{Fib}_x : \mathrm{Cov}(X) \longrightarrow \mathbf{Sets}$$
$$[Y \xrightarrow{q} X] \longmapsto q^{-1}(x).$$

先前关于基本群与覆叠空间的形式讨论说的无非是

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}_x) = \pi_1(X,x)^{\mathrm{op}}.$$

2. 令 F 为域. 考虑以 F 的所有可分扩张 E/F 为对象的范畴 $\mathcal{C}_F$, 其中对任意可分扩张 E/F 和 E'/F, 定义两者间的态射集为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_F}(E, E') = \{\varphi : E' \hookrightarrow E,\ \varphi \text{ 为 } F-\text{嵌入}\}.$$

注意到这里嵌入的方向与态射相反, 我们马上会看到缘由. 选定一个可分闭包 F^{sep}/F 并定义相应的纤维函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Fib} : \mathcal{C}_F &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ E/F &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_F}(F^{\mathrm{sep}}, E). \end{aligned}$$

显然有

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Fib}) = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)^{\mathrm{op}}.$$

3. 融几何与拓扑框架于一炉的办法之一是 Grothendieck 为概型定义的代数基本群. 以下固定域 $\Bbbk$, 其代数闭包 $\bar{\Bbbk}$, 可分闭包 $\Bbbk^{\mathrm{sep}} \subset \bar{\Bbbk}$ 以及 $\Bbbk$ 上的"好"概型 (例如要求 $X_{/\Bbbk}$ 为有限型, 分离, 几何整等等) . 取定一个几何点 $\bar{x}$, 亦即 $\Bbbk$-概型的态射 $\mathrm{Spec}(\bar{\Bbbk}) \xrightarrow{\bar{x}} X$ 并假设 $\bar{x}$ 透过 $\mathrm{Spec}(\Bbbk^{\mathrm{sep}})$ 分解, Grothendieck 在 [6, Exp. V] 定义了相应的代数基本群

$$\pi_1(X, \bar{x})$$

当 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 时, 可证明它典范同构于拓扑基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}), \bar{x})$ 的投射有限完备化. 一般情形下, 置 $\bar{X} := X \times_{\Bbbk} \Bbbk^{\mathrm{sep}}$, 则有典范的群短正合列

$$1 \to \pi_1(\bar{X}, \bar{x}) \to \pi_1(X, x) \to \mathrm{Gal}(\Bbbk^{\mathrm{sep}}/\Bbbk) \to 1$$

称为同伦正合列; 由此导出从 $\mathrm{Gal}(\Bbbk^{\mathrm{sep}}/\Bbbk)$ 映到外自同构群 $\mathrm{Out}(\pi_1(\bar{X}, \bar{x}))$ 的群同态, 这就为联系 Galois 理论与复几何开辟了一条门径. 这套想法在远交换 (anabelian) 几何中扮演要角.

关于代数基本群的进一步解说, 这里推荐 [8].

6 线性常微分方程与单值作用

线性常微分方程及其奇点理论是数学中历久弥新的题目, 虽然传统上它常被归为经典分析的一章 (如 [10, 第二章]), 实则兼通于复变函数与代数, 进一步还能导向深刻的拓扑与几何问题. 系统的解说见诸 [3, 5].

我们先考虑二阶线性常微分方程

$$\partial_z^2 u + p(z)\partial_z u + q(z)u(z) = 0,$$

其中 $p(z), q(z)$ 是给定的函数. 我们希望对给定的点 x 和初值 $(u(x), u'(x))$ 解 u, 至少局部为之. 先贤们的实践表明, 研究这类方程的要旨在于考虑复变函数: 以下皆视 $u = u(z)$ 为 Riemann 球面 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 中某开集 Ω 里的亚纯函数, $x \in \Omega$, 系数 p, q 在 Ω 上也是亚纯的.

解的性状决定于系数的解析性质, 若 p 或 q 在 $z = x$ 处有极点, 便称 x 为该方程的奇点; 若进一步有

$$\mathrm{ord}_{z=x} p(z) \geq -1, \quad \mathrm{ord}_{z=x} q(z) \geq -2,$$

则称奇点 x 是*正则奇点*. 这些定义对高阶情形有显然的推广. 奇点的正则性是考虑幂级数并运用所谓

Frobenius 方法求解方程的先决条件.

下面仅举出最著名的例子—*超几何方程*

$$z(1-z)\partial_z^2 u + (c-(a+b+1)z)\partial_z u - abu = 0,$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 是待取的参数, $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. 此方程有三个正则奇点 $\{0, 1, \infty\}$. 反过来说, 所有带三个正则奇点的一元二阶线性常微分方程都能化为超几何方程.

在奇点 $z = 0$ 附近, 超几何方程的一个幂级数解由 Gauss 的超几何函数给出

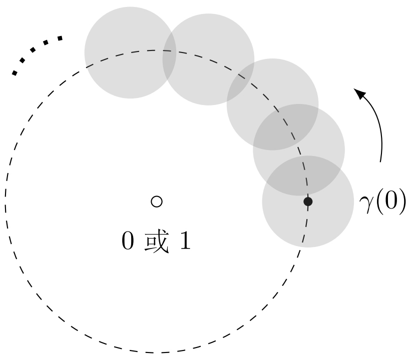
$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \qquad \forall q,\ (q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (q+k).$$

级数当 $|z| < 1$ 时收敛. 其它解也可以用超几何函数表示, 然而陈述略嫌枝蔓, 参见 [10, §4.3].

附带一提, 超几何方程在非 Archimedes 域上也有深刻的理论, 这是 Dwork 等人的工作.

下面考虑亚纯解 u 的存在和唯一性问题.

- 局部上, 在一个给定的点 $x \neq 0, 1, \infty$ 附近, 解 u 对于给定的初值 $(u(x), (\partial_z u)(x))$ 存在且唯一.
- 整体上, 注意到 $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$ 同伦等价于两个单位圆沿一点的粘合 $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, 因而 $\pi_1(\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\}, \star)$ 是自由群, 它以绕奇点 0, 1 的两条单环路为基. 沿着每条连续道路 $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\}$, 利用局部的存在唯一性可以将 $\gamma(0)$ 附近的解 u 逐步延拓到 $\gamma(1)$ 附近; 具体参看下图, 其中存在解的小邻域以灰色圆盘表示.
- 根据连续性和解的局部唯一性, 道路同伦不改变解在终点 $\gamma(1)$ 附近的延拓. 但是当道路 γ 为闭时, 沿之延拓到终点的解未必与原解相同. 障碍在于 $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\}$ 的拓扑: γ 未必同伦于常值道路.



令 V 为方程在某定点 x 附近的解空间, 严格来说这里考虑的是解在 x 的芽; 局部唯一性蕴含了

$$V \simeq \{(u(x), (\partial_z u)(x)) : u \text{ 是局部解}\} \simeq \mathbb{C}^2.$$

综上所述, 我们遂得到称作*单值作用*的群同态 $\pi_1(\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\}, x) \to \mathrm{GL}(V)$. 单值作用的描述归结为对正向围绕 0 和 1 的单环路各自计算相应的 2×2-矩阵, 这是 Riemann 的工作, 其公式比较复杂, 见 [5, Example 5.10].

现在镜头拉远, 类似构造对于在 $\mathbb{P}^1 \smallsetminus D$ 上任意阶数, 正则奇点的方程同样有效, 这里 $D \subset \mathbb{P}^1$ 是一个有限子集. 所谓 Riemann-Hilbert 问题便是探讨有哪些 π_1 的表示来自这类方程的单值作用.

进一步抽象之, 可以考虑如下的情境: X 是 Riemann 面, 复代数曲线或者一般的复流形, 并在合适的框架下讨论 $(\mathscr{E}, D)$, 其中 $\mathscr{E}$ 是 X 上的有限秩向量从而 D 是其上的平坦联络. 相应的 "水平截面" 构成一个 X 上的层 $\mathscr{E}^D$, 它实际是 X 上的*局部系统*, 在定点 x 上的茎一样带有基本群 $\pi_1(X, x)$ 的单值作用.

研究这类问题的一般的框架应属 D-模理论 [3]. 由于我们意欲和多项式的 Galois 理论作直接类比, 下面将采取另一套进路: 微分 Galois 理论.

7 统合: 淡中对偶理论

淡中范畴及其对偶性源于淡中忠郎和 Krein 关于紧群表示论的工作, 后来在 Saavedra Rivano 和 Deligne 的手中彻底改头换面 [2]. 为此必须引进一些被称为张量范畴的语汇, 若欲说清楚, 就不免要翻越定义的层峦叠嶂. 所以请容我采取印象派风格.

定义 7.1 取定域 $\Bbbk$, 简单起见假设代数闭; 一个 (中性) 淡中范畴系指以下资料:

- 一个合适的 $\Bbbk$-线性 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ (意谓 Hom-集都是 $\Bbbk$-向量空间, 态射合成为双线性型, 而且其中和 $R-\mathbf{Mod}$ 一样有核, 余核, 正合列等操作);
- 一个取值在 $\mathcal{C}$ 里的双函子 $\otimes$, 或者用积范畴的语言说是一个函子 $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\xrightarrow{\otimes}\mathcal{C}$;
- 对于 $\otimes$ 的单位对象 $\mathbf{1}$;
- 从 $\mathcal{C}$ 到相反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 之对偶函子 $X\mapsto X^\vee$;
- 一个给定的同构 $\mathrm{Hom}(\mathbf{1},\mathbf{1})\simeq\Bbbk$.

最直接的例子是域 $\Bbbk$ 上有限维向量空间范畴 $\mathbf{Vect}_f$, 其中一维空间 $\mathbf{1}:=\Bbbk$ 作为单位对象, 连同寻常的张量积 $\otimes$ 和对偶空间函子 $X\mapsto X^\vee$. 我们要求构成淡中范畴的资料也满足例子 $(\mathbf{Vect}_f,\otimes,\vee)$ 所具的基本性质, 例如 $\otimes$ 的结合律, $\mathbf{1}$ 表现如同乘法单位, 以及满足合适性质的自然变换 $\mathbf{1}\to X^\vee\otimes X$, $X\otimes X^\vee\to\mathbf{1}$ 等等. 注意: 这些性质仅在差一个自然同构的意义下成立.

至关紧要的条件是存在 "纤维函子" $\omega:\mathcal{C}\to\mathbf{Vect}_k$: 它须为 (i) $\Bbbk$-线性且忠实 (在 Hom-空间层次上为同构), 正合 (保正合列) 的; (ii) 张量函子 (保持两边与 $\otimes$ 有关的结构).

我们将把淡中范畴的资料简记为 $(\mathcal{C},\ldots)$.

仿照先前手法可以对纤维函子定义自同构群 $G:=\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$, 亦即 $\mathrm{Aut}(\omega)$ 中保 $\Bbbk$-线性和 $\otimes$ 结构的子群. 考虑到这些对称性, ω 的像实则落在 G 的有限维表示范畴 $G-\mathbf{Rep}$ 中; 下面将赋予 G 仿射代数群结构, 所论的表示也将自动是代数群的表示, 这时 $G-\mathbf{Rep}$ 具有自然的淡中范畴结构.

注记 7.2 何谓域 $\Bbbk$ 上的代数群? 这是指 $\Bbbk$ 上的概型 G 连同态射

- $m:G\times G\to G$ (群乘法)
- $i:G\to G$ (取逆)
- $1\in G(\Bbbk)$ (单位元)

使得群论公理对这些 G 上的运算成立. 直截了当地说, 代数簇 G 上具有一个群结构, 使得各种群论运算都是 "代数地" 定义的. 仿射代数群意谓 G 是仿射 $\Bbbk$-概型, 基本例子是 $\mathrm{GL}(n)$. 线性代数群意谓 G 是某个 $\mathrm{GL}(n)$ 的闭子群, 例如 $G=\mathrm{SL}(n)$ 和 $\mathrm{O}(n)$ 等. 对于仿射代数群, 准此可以考虑其 "代数地" 定义的有限维表示, 这是所谓代数群表示的具体内涵.

椭圆曲线或者更一般的 Abel 簇是代数群的另一类基本例子, 其性状和仿射代数群迥异. 关于代数群的深入介绍可参看 [13].

定理 7.3 给定淡中范畴 $(\mathcal{C},\ldots)$ 连同纤维函子 ω, 群 $G:=\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ 具有自然的仿射 $\Bbbk$-代数群结构, 而相应的函子 $(\mathcal{C},\ldots)\to G-\mathbf{Rep}$ 是个淡中范畴之间的等价.

注记 7.4 事实上 G 是一族线性代数群的投射极限. 特别地, 从一个线性 $\Bbbk$-代数群出发 (不妨设 $\Bbbk=\mathbb{C}$ 而群为有限群), 由其有限维表示范畴足以重构原群; 这就解释了淡中范畴的主定理何以又称作对偶性 — 它是交换群的 Pontryagin 对偶定理的推广. 前提是我们必须一并考虑群表示的张量积和各种函子性, 仅看不可约特征标是远远不够的.

淡中范畴在几何与数论方面多有应用, 包括志村簇和 Hodge 结构等问题的研究. 以下仅讨论微分方程的例子.

8 微分 Galois 理论一瞥

前人在充分理解 Galois 的工作之后, 很快就将目光转移到线性微分方程上的应用. 所谓的微分 Galois 理论一般归于 Picard, Vessiot 和 Kolchin 等人的开创性工作, 旨在从对称性来理解微分方程. 简介可参考 [4], 理论细节详见 [5]. 现今也以 "微分代数" 一词包举对各类具有某种微分运算的代数结构之研究.

今后皆假设域的特征为零.

定义 8.1 所谓微分域系指一组资料 (K, ∂), 其中 K 是域而 $\partial : K \to K$ 满足

$$\partial(x+y) = \partial x + \partial y,$$
$$\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y).$$

注意到 $\partial 1 = \partial 0 = 0$. 常数域定义为 $K^\partial := \mathrm{Ker}(\partial)$.

设 (K, ∂_K) 和 (L, ∂_L) 为微分域, 若 $L \supset K$ 而 $\partial_L|_K = \partial_K$ 则称 (L, ∂_L) 是 (K, ∂_K) 的扩张或称 ∂-扩张; 准此要领, 可以定义 ∂-同构等概念.

换言之, 在 K 上除了加减乘除我们额外考虑一个满足 Leibnitz 律的运算 ∂, 不妨称之为微分.

例 8.2 有理函数域 $\mathbb{C}(z)$, Laurent 幂级数域 $\mathbb{C}((z))$, 以及收敛半径非零的幂级数环 $\mathbb{C}\{z\}$ 之分式域 $\mathbb{C}(\{z\})$ 都是微分域, 其上 $\partial = \partial_z$ 的定义是自明的, 常数域皆为 $\mathbb{C}$.

定义 8.3 所谓微分模系指一个 n-维 K-向量空间 V, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 连同映射 $\nabla : V \to V$, 满足加性 $\nabla(v+w) = \nabla(v) + \nabla(w)$ 和 Leibnitz 律

$$\nabla(fv) = (\partial f)v + f\nabla v, \quad f \in K,\ v \in V.$$

利用习见的技巧, 求解微分域 K 中的方程 $(\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_0)u = 0$ 相当于对适当的微分模 (V, ∇) 描述 $V^\nabla := \mathrm{Ker}(\nabla : V \to V)$. 一个标准但不唯一的取法是 $V := K^n$, 令 $u \in K$ 对应到 $(u, \ldots, \partial^{n-1}u) \in V$ 而 $\nabla : V \to V$ 为

$$\nabla := \partial - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

下面是一个基本的代数事实, 诸位兴许已经在常微分方程的课程里见过 (请回忆 Wroński 行列式).

命题 8.4 设 (V, ∇) 为 (K, ∂) 上的微分模, $\dim_K V = n$, 则

$$\dim_{K^\partial} V^\nabla \leq n.$$

上式中等号一般不成立, 原因可以粗略地理解为域 K 未必能容纳微分方程的解. 以多项式分裂域的构造为鉴, 我们可以试着形式地构造 K 的 ∂-扩张 L, 使得新的微分 L-模 $(V \otimes_K L, \nabla_L)$ 满足 $(V \otimes_K L)^{\nabla_L} = n$; 当然, 我们还要求 L 的取法是尽量 "经济" 的.

定义 8.5 假设 K^∂ 代数闭. 当以下条件满足时, 我们称一个 ∂ 扩张 L/K 是一个 Picard-Vessiot 扩张:

- $L^\partial = K^\partial$,

- $\dim_{K^\partial}(V \otimes_K L)^{\nabla_L} = n$,
- 将 $(V \otimes_K L)^{\nabla_L} \subset V \otimes_K L$ 用 V 的任一组基底表达, 则全体分量在 K 上生成 L.

定理 8.6 保持上述假设. 对于 (K, ∂) 上的任意微分模 (V, ∇) 都存在 Picard-Vessiot 扩张 L/K; 它们在 ∂-同构意义下是唯一的.

证明的原理和分裂域的造法类似, 按下不表.

定义 8.7 承上, 定义 (V, ∇) 的微分 Galois 群为 $\mathrm{Gal}^\partial(L/K) := \mathrm{Aut}_{K,\partial}(L, \partial)$.

微分 Galois 理论中也有 Galois 对应. 请诸位琢磨它与之前情形的异同.

定理 8.8 微分 Galois 群 $G := \mathrm{Gal}^\partial(L/K)$ 具备自然的 K^∂-线性代数群结构: 实际上 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_{K^\partial}(n)$. 我们有双射

$$\begin{aligned} \{H \subset G: \text{闭子群}\} &\longleftrightarrow \{K \subset E \subset L: \text{中间微分域}\} \\ H &\longmapsto L^H \\ \mathrm{Gal}^\partial(L/E) &\longleftarrow\!\shortmid E. \end{aligned}$$

此外, $H \lhd G$ 当且仅当 E/K 是 Picard-Vessiot 扩张.

这里最显眼者当属 G 的线性代数群结构. 多项式的 Galois 群归根结柢是根的某些置换, 而微分模或者线性常微分方程的 Galois 群作用实际由它在 n 维 K^∂-向量空间 $(V \otimes_K L)^{\nabla_L}$ 上的线性作用决定. 不难想见, 这和基本群的单值作用应当有密切的联系, 而我们业已看到基本群也是某种意义下的 Galois 群! 举例明之, 对于 Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上具有正则奇点的线性常微分方程, 且记其奇点集为 D, 一个基本的事实是: $\pi_1(\mathbb{P}^1 \smallsetminus D)$ 的单值作用的像 (这是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的子群) 的 Zariski 闭包自然地同构于它的微分 Galois 群.

谨以下表重申多项式理论和微分理论的类比:

主题	多项式	微分模
对称性	根的对称	方程解的对称
扩张	Galois 扩张	Picard-Vessiot 扩张
对称群	$\mathrm{Gal}(L/K)$	$\mathrm{Gal}^\partial(L/K)$
应用	多项式方程的根式解	微分方程的 "初等" 解

最后一条需要解释. 这里的初等解意谓着从基域 K 例如 $\mathbb{C}(z)$ 出发, 构作一列 ∂-扩张

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m$$

所能获得的元素, 条件是对每个 $0 \le i < m$ 皆有 $K_{i+1} = K_i(u)$, 其中 u (及微分运算 $\partial_{K_{i+1}}$) 来自于

- 不定积分或曰反导函数, 亦即求解 $\partial u = a$, $a \in K_i$;
- 指数, 亦即求解 $\partial u = au$, $a \in K_i^\times$;
- 代数扩张, 亦即求解多项式方程 $P(u) = 0$.

这般手续得到的 ∂-扩张称作 *Liouville 扩张*. 微分 Galois 理论的一个经典定理如下, 它可以说是 Galois 的根式解判准的一种微分版本.

定理 8.9 设 K^∂ 代数闭, 一个 Picard-Vessiot 扩张 L/K 是 Liouville 扩张的充要条件是 $G := \mathrm{Gal}^\partial(L/K)$ 的单位连通分支 G° 是可解的线性代数群.

连通线性代数群 H 可解的刻画与抽象群情形类似, 差别仅在于此时要考虑的是代数版本的换位子群. 我们不涉足证明, 仅提示一点: 反导函数和指数情形分别在 G° 的合成列里贡献加性群 $\mathbb{G}_a$ 和乘性群 $\mathbb{G}_m$, 而这两者正是可解群的基本构件.

现在引入淡中对偶理论. 上来已经隐约用到了微分模的张量积: 若 V, W 皆是 (K,∂) 上的微分模, 则在 $V\otimes_K W$ 上可以定义 $\nabla(v\otimes w)=\nabla v\otimes w+v\otimes\nabla w$. 对偶空间 $V^\vee$ 上也有典范的微分模结构 $(\nabla^\vee\lambda)(v)=--\lambda(\partial v)$. 单位元 $\mathbf{1}$ 定为 $(K,\nabla=0)$. 于是我们有淡中范畴的基本要件.

今固定 (V,∇), 并令 $\langle V,\nabla\rangle_\otimes$ 为 (V,∇) 生成的淡中满子范畴. 具体地说, 这无非是考虑所有形如

$$(V,\nabla)^{\otimes r}\otimes(V^\vee,\nabla^\vee)^{\otimes s},\quad r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

的微分模的有限直和, 再考虑所有子商所得到的满子范畴. 范畴 $\langle V,\nabla\rangle_\otimes$ 在代数闭域 K^∂ 上是线性的. 选取与 (V,∇) 相应的 Picard-Vessiot 扩张 L/K; 定义 $\langle V,\nabla\rangle_\otimes$ 的纤维函子为

$$\omega_L:(W,\nabla_W)\mapsto(W\otimes_K L)^{\nabla_{W,L}}.$$

可以验证这些资料 $(\langle V,\nabla\rangle_\otimes,\ldots,\omega_L)$ 确实定义了淡中范畴.

命题 8.10 作为 K^∂-代数群, $\mathrm{Aut}^\otimes(\omega_L)$ 自然地同构于 $G:=\mathrm{Gal}^\partial(L/K)$. 特别地, $\langle V,\nabla\rangle_\otimes$ 等价于 $G-\mathbf{Rep}$.

微分 Galois 理论还有许多变体, 例如多变元情形和所谓 q-差分方程的差分 Galois 理论等. 另一方面, 随着计算机技术和符号计算的发展, 微分代数的算法面向也变得日益重要. 篇幅所限不能殚记, 读者可在参考书目中寻得线索.

参考文献

[1] David A. Cox. *Galois theory*. Second. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012, pp. xxviii+570. ISBN: 978-1-118-07205-9. DOI: 10.1002/9781118218457. URL: http://dx.doi.org/10.1002/9781118218457.

[2] P. Deligne. “Catégories tannakiennes”. In: *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*. Vol. 87. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195.

[3] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*. Vol. 236. Progress in Mathematics. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008, pp. xii+407. ISBN: 978-0-8176-4363-8. DOI: 10.1007/978-0-8176-4523-6. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4523-6.

[4] Andy R. Magid. “Differential Galois theory”. In: *Notices Amer. Math. Soc.* 46.9 (1999), pp. 1041–1049. ISSN: 0002-9920.

[5] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*. Vol. 328. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2003, pp. xviii+438. ISBN: 3-540-44228-6. DOI: 10.1007/978-3-642-55750-7. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55750-7.

[6] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129)]. Société Mathématique de France, Paris, 2003, pp. xviii+327. ISBN: 2-85629-141-4.

[7] Jean-Pierre Serre. *Topics in Galois theory*. Second. Vol. 1. Research Notes in Mathematics. With notes by Henri Darmon. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008, pp. xvi+120. ISBN: 978-1-56881-412-4.

[8] Tamás Szamuely. *Galois groups and fundamental groups*. Vol. 117. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009, pp. x+270. ISBN: 978-0-521-88850-9. DOI: `10.1017/CBO9780511627064`. URL: `http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511627064`.

[9] 尤承业. *基础拓扑学讲义*. 北京大学出版社, 1997. ISBN: 978-7-301-03103-2.

[10] 王竹溪, 郭敬仁. *特殊函数概论*. Vol. 5. 中外物理学精品书系. 北京大学出版社, 2012. ISBN: 978-7-301-20049-0.

[11] 聂灵沼, 丁石孙. *代数学引论*. 第二版. 高等教育出版社, 2000. ISBN: 978-7-04-008893-9.

[12] 黎景辉, 白正简, 周国晖. *高等线性代数学*. Vol. 47. 现代数学基础. 高等教育出版社, 2014. ISBN: 978-7-04-041057-0.

[13] 黎景辉, 陈志杰, 赵春来. *代数群引论*. Vol. 101. 现代数学基础丛书. 科学出版社, 2006. ISBN: 9787030178619.