集合论与图论
第九讲　图的连通性

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.5.7

图

- 无向图的连通性
- 无向图的连通度
- 有向图的连通性

无向图的连通性

定义

设$G=\langle V,E\rangle$，$\forall u,v\in V$，若u,v之间存在通路，则称u,v是连通的，记作$u\sim v$，并且对$\forall u\in V$，规定$u\sim u$。

无向图中顶点之间的连通关系是等价关系。

定义

若G为平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G是连通图，否则称G是非连通图或分离图。

无向完全图$K_n(n\geq 1)$都是连通图，零图$N_n(n\geq 2)$均为非连通图。

定义

设$G=\langle V,E\rangle$中，V关于顶点之间的连通关系的商集$V/\sim=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$，称导出子图$G[V_i](i=1,2,\cdots,k)$为$G$的连通分支，连通分支数$k$记为$p(G)$。

若G为连通图，则$p(G)=1$，若G为非连通图，则$p(G)\geq 2$。

顶点之间的距离

定义

设u, v为图G中的任意两顶点，若u, v连通，称u, v间长度最短的通路为u, v之间的短程线，短程线的长度称为u, v之间的距离，记作$d(u, v)$，当u, v不连通时，规定$d(u, v) = \infty$。

G中顶点之间的距离有如下性质：

1. $d(u, v) \geq 0$，$u = v$时，等号成立；
2. 满足三角不等式：$\forall u, v, w \in V(G).d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$;
3. 具有对称性：$d(u, v) = d(v, u)$。

定义

设图$G = \langle V, E \rangle$，称$\max\{d(u, v) | u, v \in V\}$为$G$的直径，记作$d(G)$。

若$G = K_n (n \geq 2)$，$d(G) = 1$；若G是长度为n的圈，$d(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$；
若G是平凡图，$d(G) = 0$；若G是零图$N_n (n \geq 2)$，$d(G) = \infty$。

二部图判别定理

定理

一个图G为二部图当且仅当图G中无奇圈。

无向连通图阶与边数的关系

定理

设G为n阶无向图，若G是连通图，则G的边数$m \geq n-1$。

图

- 无向图的连通性
- **无向图的连通度**
- 有向图的连通性

点割集与边割集

定义

设$G=\langle V,E\rangle$，若存在$V'\subset V$且$V'\neq\emptyset$，使得$p(G-V')>p(G)$，而对任意的$V''\subset V'$，均有$p(G-V'')=p(G)$，则称V'是G的点割集。特别地，若G的点割集V'是单元集，即$V'=\{v\}$，则称v为割点。

定义

设$G=\langle V,E\rangle$，若存在$E'\subset E$且$E'\neq\emptyset$，使得$p(G-E')>p(G)$，而对任意的$E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$，则称E'是G的边割集或简称为割集。特别地，若G的割集E'是单元集，即$E'=\{e\}$，则称e为桥。

对任意的$v\in V(G)$，v的关联集$I_G(v)$，和G的割集E'，若$E'\subseteq I_G(v)$，则称E'为v产生的扇形割集，简称扇形割集。若v不是割点，则$I_G(v)$本身即为扇形割集。

连通度

定义

设G为无向连通图且不含K_n为生成子图，则称

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V'\text{为}G\text{的点割集}\}$$

为G的点连通度，简称连通度。并规定完全图K_n的点连通度为$n-1$，$n \geq 1$，又规定非连通图的点连通度为0。若$\kappa(G) \geq k$，则称G为k-连通图。

边连通度

定义

设G为无向连通图，称

$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{为} G \text{的边割集}\}$$

为G的边连通度。并规定非连通图的边连通度为0。若$\lambda(G) \geq k$，则称G为k边-连通图。

Whitney定理

定理

对于任意的图G，均有下面不等式成立:

$$\kappa \leq \lambda \leq \delta$$

其中κ, λ, δ分别为G的点连通度，边连通度和最小度。

命题

存在$u \in V(G_1), v \in V(G_2)$，使得$u, v$在$G$中不相邻。

推论

若G是k-连通图，则G必为k边-连通图。

无向图的连通度

定理

设G是n（$n \geq 6$）阶简单无向连通图，$\lambda(G) < \delta(G)$，则必存在由K_{n_1}，K_{n-n_1}及在它们之间适当地连入$\lambda(G)$条边含G作为生成子图的图G^*，其中$\lambda(G) + 2 \leq n_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

推论

1. $\delta(G) \leq \delta(G^*) \leq n_1 - 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$;
2. G^*中存在不相邻的顶点u, v，使得$d_{G^*}(u) + d_{G^*}(v) \leq n - 2$;
3. $d(G) \geq d(G^*) \geq 3$。

无向图的连通度

定理

设G是n（$n \geq 6$）阶连通简单无向图。

1. 若$\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则$\lambda(G) = \delta(G)$;
2. 若对G中任意一对不相邻顶点u, v，均有$d(u) + d(v) \geq n - 1$，则$\lambda(G) = \delta(G)$;
3. 若$d(G) \leq 2$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

定理

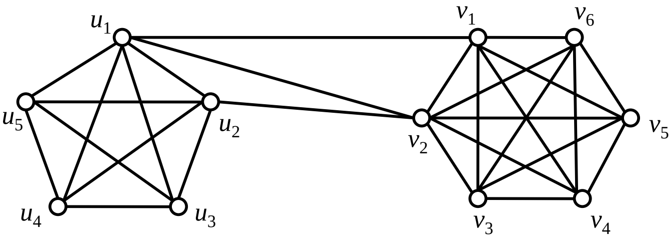
设G是n阶无向简单连通图，且G不是完全图K_n，则

$$\kappa(G) \geq 2\delta(G) - n + 2$$

无向图的连通度

定理

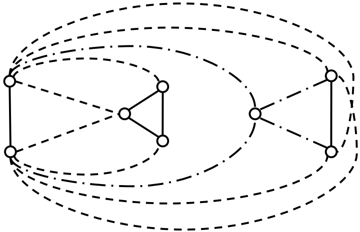
对于给定的正整数$n, \delta, \kappa, \lambda$，存在$n$阶简单连通无向图$G$，使得$\delta(G) = \delta$，$\kappa(G) = \kappa$，$\lambda(G) = \lambda$的充分必要条件是下列三式之一成立：
(1) $0 \leq \kappa \leq \lambda \leq \delta < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
(2) $1 \leq 2\delta - n + 2 \leq \kappa \leq \lambda = \delta < n - 1$;
(3) $\kappa = \lambda = \delta = n - 1$。



无向图的连通度

定理

对于给定的正整数$n, \delta, \kappa, \lambda$，存在$n$阶简单连通无向图$G$，使得$\delta(G) = \delta$，$\kappa(G) = \kappa$，$\lambda(G) = \lambda$的充分必要条件是下列三式之一成立：
(1) $0 \leq \kappa \leq \lambda \leq \delta < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
(2) $1 \leq 2\delta - n + 2 \leq \kappa \leq \lambda = \delta < n - 1$;
(3) $\kappa = \lambda = \delta = n - 1$。



无向图的连通度

定理

设G为$n(n \geq 3)$阶无向连通图，G为2-连通图当且仅当G中任意两个顶点共圈。

无割点与无桥图

定义

设G为无向连通图，若G中无割点，则称G为块。若G中有割点，则称G中成块的极大连通子图为G的块。

对于$n(n \geq 3)$阶的无向图G，若G是块，则G中任意两个顶点共圈，反之，若G中任意两个顶点共圈，则G是块。

定理

设G为$n(n \geq 3)$阶无向图，G为2边-连通图当且仅当G中任何两个顶点共简单回路。

有割点与有桥图的性质

定理

设v为无向连通图G中的一个顶点，v为G的割点当且仅当存在$V(G)-v$的一个划分：$V(G)-v=V_1\cup V_2$，使得对于任意的$u\in V_1$，任意的$w\in V_2$，v在每一条u到w的路径上。

推论

设v为无向连通图G中的一个顶点，v为G的割点当且仅当存在与v不同的两个顶点u和w，使v处在每一条从u到w的路径上。

定理

设e为无向连通图G中的一条边，e为桥当且仅当存在$V(G)$的一个划分：$V(G)=V_1\cup V_2$，使得对于任意的$u\in V_1$，$v\in V_2$，e在每一条u到v的路径上。

图

- 无向图的连通性
- 无向图的连通度
- **有向图的连通性**

有向图的可达性与连通性

定义

若在有向图D中从顶点v_i到v_j存在通路，则称v_i可达v_j，记作$v_i \to v_j$，对于任意的$v_i \in V(D)$，规定$v_i \to v_i$。若$v_i \to v_j$且$v_j \to v_i$，则称v_i与v_j相互可达，记作$v_i \leftrightarrow v_j$，对于任意的$v_i \in V(D)$，规定$v_i \leftrightarrow v_i$。

定义

在有向图D中，若$v_i \to v_j$，称v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的短程线，其长度称为v_i到v_j的距离，记作$d\langle v_i, v_j\rangle$。

定义

设D为一个有向图，若D的基图是连通图，则称D是弱连通图，或简称D是连通图，对于任意的$v_i, v_j \in V(D)$，若$v_i \to v_j$，$v_j \to v_i$至少成立其一，则称D 是单向连通的。对任意的$v_i, v_j \in V(D)$，若均有$v_i \leftrightarrow v_j$，则称D 是强连通的。

有向图连通性的充要条件

定理

设D为一个n阶有向图，D是强连通的当且仅当D中存在回路，它经过D中每个顶点至少一次。

定理

设D为n阶有向图，D是单向连通的当且仅当D中存在经过D中每个顶点至少一次的通路。

命题

设D是单向连通的有向图，则对于任意的$V' \subseteq V(D)$，存在$v' \in V'$，使得任意的$v \in V'$，均有$v' \to v$。

有向图的连通分支

定义

设D为有向图，称具有强连通性质的极大子图为D的强连通分支，称具有单向连通性质的极大子图为D的单向连通分支，称具有弱连通形式的极大子图为D的连通分支。

作业

1. 简单图G中，若$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，证明$G$中不存在孤立结点。
2. 设G为n（$n \geq 3$）阶无向简单连通图，证明下列命题等价:
   (1) G是块;
   (2) G中任意二顶点共圈;
   (3) G中任意一个顶点与任意一条边共圈;
   (4) G中任意两条边共圈;
   (5) 任给G中两个顶点u, v和一条边e，存在从u到v经过e的路径;
   (6) 对于G中任意三个顶点中的两个，都存在从一个顶点到另一顶点且含第三个顶点的路径;
   (7) 对于G中任意三个顶点中的两个，都存在从一个顶点到另一顶点且不含第三个顶点的路径。
3. 证明若图G满足$n \geq 2k+1$，且$m \geq (2k-3)(n-k+1)+1$，则G必有k连通子图。