集合论与图论
第八讲　图

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/~sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.4.23

图

- 图的基本概念
- 通路与回路

无向图的定义

定义

设A、B为任意两个集合，称$\{\{a,b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$为$A$与$B$的无序积，记作$A\&B$。

- 无序积中的无序对$\{a,b\}$记为(a,b)，并且允许$a=b$。
- 注意：无论a与b是否相等，均有$(a,b)=(b,a)$。

定义

一个无向图是一个有序的二元组$\langle V,E\rangle$，记作G，其中

1. $V \neq \emptyset$称为G的顶点集，其元素称为顶点或结点；
2. E称为边集，它是无序积$V\&V$的多重子集，其元素称为无向边，简称为边。

有向图的定义和图的图形表示

定义

一个有向图是一个有序的二元组$\langle V, E\rangle$，记作D，其中

1. $V \neq \emptyset$称为D的顶点集，其元素称为顶点或结点；
2. E称为边集，它是笛卡尔积$V \times V$的多重子集，其元素称为有向边，简称为边。

对于无向图G和有向图D，可用圆圈表示顶点，顶点之间的线段表示无向边，用有向线段表示有向边，给出无向图或有向图的图形表示。

例

画出下面二图的图形：

1. $G = \langle V, E\rangle$，其中$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4)\}$;
2. $D = \langle V, E\rangle$，其中$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$E = \{\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_3\rangle, \langle v_3, v_1\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \langle v_3, v_4\rangle, \langle v_4, v_4\rangle\}$。

图的基本概念

- 在图的定义中，用G和D分别表示无向图和有向图，有时也用G泛指一个图（无向图或有向图），但是D只能表示有向图。
- 为方便起见，有时用$V(G), E(G)$分别表示图G的顶点集和边集，用$V(D), E(D)$表示有向图D的顶点集和边集，另外，用$|V(G)|$，$|E(G)|$和$|V(D)|$，$|E(D)|$分别表示G和D的顶点数和边数。
- 若$|V(G)| = n$（或$|V(D)| = n$），则称G（或D）为n阶图（或n阶有向图）。
- 对图G来说，若$|V(G)|$和$|E(G)|$均为有限数，则称G为有限图。
- 无向图用$e_k = (v_i, v_j)$表示边,有向图用$e_k = \langle v_i, v_j\rangle$表示有向边。有向图$D$中各有向边的箭头都去掉得到的无向图$G$称为$D$的基图。
- 在图G中，若$E(G) = \emptyset$，则称G为零图，此时若$|V(G)| = n$，则称G为n阶零图，记为N_n，称N_1为平凡图。
- 图的运算可能产生顶点集为空集的结果，规定顶点集为$\emptyset$的图为空图，记为$\emptyset$。
- 图的图形表示中顶点和边都不标定字母的图称为非标定图，顶点或边用字母标定的图称为标定图。

图的基本概念

定义

设$G = \langle V, E\rangle$为一个无向图，$e_k = (v_i, v_j) \in E$，则称v_i, v_j为e_k的端点，e_k与v_i（e_k与v_j）是彼此相关联的。若$v_i \neq v_j$，则称e_k与v_i（e_k与v_j）的关联次数为1，若$v_i = v_j$，则称e_k与v_i的关联次数为2，此时称e_k为环。
设$v_l \in V$，$v_l \neq v_i$，$v_l \neq v_j$，则称e_k与v_l的关联次数为0。
设$D = \langle V, E\rangle$为一个有向图，$e_k = \langle v_i, v_j\rangle \in E$，称$v_i, v_j$为$e_k$的端点，并称$v_i$为$e_k$的始点，$v_j$为$e_k$的终点，若$v_i = v_j$，称$e_k$为$D$中的一个环。
无论在无向图还是有向图中，无边关联的顶点均称为孤立点。

定义

设$G = \langle V, E\rangle$为一个无向图，对任意的$v_i, v_j \in V$，若存在边$e_k \in E$，使得$e_k = (v_i, v_j)$，则称v_i与v_j是彼此相邻的，简称相邻的。
对于任意的$e_k, e_l \in E$，若e_k与e_l至少有一个公共端点，则称e_k与e_l是彼此相邻的，简称相邻的。
设$D = \langle V, E\rangle$为一个有向图，对任意的$v_i, v_j \in V$，若存在边$e_k \in E$，使得$e_k = \langle v_i, v_j\rangle$，则称$v_i$邻接到$v_j$，$v_j$邻接于$v_i$。

图的基本概念

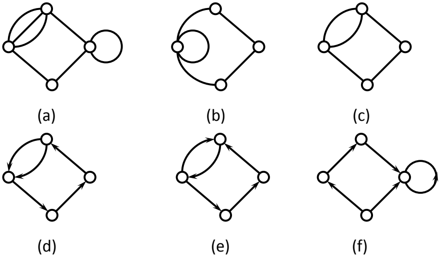
定义

- 设G为任意一个无向图，对任意的$v \in V(G)$，
  - 称$\{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$为$v$的邻域，记作$N_G(v)$。
  - 称$N_G(v) \cup \{v\}$为v的闭邻域，记作$\overline{N}_G(v)$。
  - 称$\{e \mid e$与v相关联$\}$为v的关联集，记作$I_G(v)$。
- 设D为任意一个有向图，对任意的$v \in V(D)$，
  - 称$\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u\rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$为$v$的后继元集，记作$\Gamma_D^+(v)$。
  - 称$\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v\rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$为$v$的先驱元集，记作$\Gamma_D^-(v)$。
  - 称$\Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$为$v$的邻域，记作$N_D(v)$。
  - 称$N_D(v) \cup \{v\}$为v的闭邻域，记作$\overline{N}_D(v)$。

多重图与简单图

定义

- 设G为一无向图，$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r} \in E(G)$，$r \geq 2$，若$e_{i_s} = (v_i, v_j)$，$1 \leq s \leq r$，称$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}$为平行边，$r$为边$(v_i, v_j)$的重数。
- 设D为一有向图，$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r} \in E(D)$，$r \geq 2$，若$e_{i_s} = \langle v_i, v_j \rangle$，$1 \leq s \leq r$，称$e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}$为平行边，$r$为有向边$\langle v_i, v_j \rangle$的重数。
- 称含平行边的图为多重图，不含平行边也不含环的图为简单图。



结点的度数

定义

- 设无向图$G=\langle V,E\rangle$，对于任意的$v\in V$，称v作为G中边的端点的次数之和为v的度数，简称度，记作$d_G(v)$，在不混淆的情况下可简记为$d(v)$。
- 设有向图$D=\langle V,E\rangle$，对于任意的$v\in V$，称v作为D中边的始点的次数之和为v的出度，记作$d_D^+(v)$，简记为$d^+(v)$。称v作为D中边的终点的次数之和为v的入度，记作$d_D^-(v)$，简记为$d^-(v)$。称$d_D^+(v)+d_D^-(v)$为v的度数，记作$d_D(v)$，简记为$d(v)$。

最大（最小）度数

- 设G为无向图，令
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$$
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$$
则$\Delta(G), \delta(G)$分别为G的最大度数和最小度数，简称最大度 和最小度。

- 设D为一个有向图，类似可定义D中的最大度数$\Delta(D)$和最小度数$\delta(D)$。另外，令
$$\Delta^{+}(D) = \max\{d^{+}(v) \mid v \in V(D)\}$$
$$\delta^{+}(D) = \min\{d^{+}(v) \mid v \in V(D)\}$$
$$\Delta^{-}(D) = \max\{d^{-}(v) \mid v \in V(D)\}$$
$$\delta^{-}(D) = \min\{d^{-}(v) \mid v \in V(D)\}$$
它们依次称为D的最大出度，最小出度，最大入度，最小入度。

- 若G为n阶无向简单图，则$\Delta(G) \le n-1$，若D为n阶有向简单图，则$\Delta(D) \le 2(n-1)$。

图论的基本定理（握手定理）

定理

设$G=\langle V,E\rangle$为一个无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$。

定理

设$D=\langle V,E\rangle$为一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i)=m$。

推论

任何图G（无向图或有向图）中，奇度数顶点的个数是偶数。

- 度数为奇数的顶点称为奇度顶点，度数为偶数的顶点称为偶度顶点。

度数列

定义

设$G=\langle V,E\rangle$为一无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称$(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$ 为G的度数列。

- 对于顶点编好号的给定图G，它的度数列是惟一确定的。
- 对于任意给定的非负整数列，$\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，若存在以$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$为顶点集的$n$阶图$G$，以$\mathbf{d}$为度数列，则称$\mathbf{d}$是可图化的。特别地，若存在以$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$为顶点集的$n$阶简单图$G$，以$\mathbf{d}$为度数列，则称$\mathbf{d}$是可简单图化的。

$\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$（$d_i\geq 0$且为整数，$i=1,2,\cdots,n$）在什么条件之下是可图化的？在什么条件之下是可简单图化的？

整数列可图化的充要条件

定理

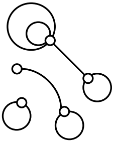
$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$（$d_i \geq 0$且为整数，$i = 1, 2, \cdots, n$）是可图化的当且仅当$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0(mod\, 2)$。

整数列可图化的充要条件

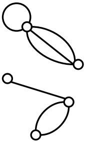
例

下面给出的两个整数列，哪个是可图化的？

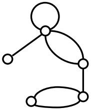
(1) $\mathbf{d}=(5,4,4,3,3,2)$；(2) $\mathbf{d}=(5,3,3,2,1)$。



(a)



(b)



(c)

整数列可简单图化的充要条件

定理

设非负整数列$\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$（$n-1\geq d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 0$）则$\mathbf{d}$是可简单图化的当且仅当对于每个整数$r$，$1\leq r\leq(n-1)$，$\sum_{i=1}^{r}d_i\leq r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\}$，且$\sum_{i=1}^{n}d_i=0(mod\,2)$。

例

判断下列各非负整数列是否是可简单图化的？

(1) $\mathbf{d}=(5,4,3,2,2,1)$; (2) $\mathbf{d}=(5,4,4,3,2)$;
(3) $\mathbf{d}=(3,3,3,1)$; (4) $\mathbf{d}=(6,6,5,4,3,3,1)$;
(5) $\mathbf{d}=(5,5,3,3,2,2,2)$; (6) $\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$d_1>d_2>\cdots>d_n\geq 1$。

整数列可简单图化的充要条件

定理

设非负整数列$\mathbf{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0(mod\,2)$，且$(n-1)\geq d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 0$，则$\mathbf{d}$是可简单图化的当且仅当$\mathbf{d}'=(d_2-1, d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$ 是可简单图化的。

例

判断下列两个非负整数列是否是可简单图化的?

(1) $\mathbf{d}=(5,5,4,4,2,2)$;　　(2) $\mathbf{d}=(4,4,3,3,2,2)$。

图的同构

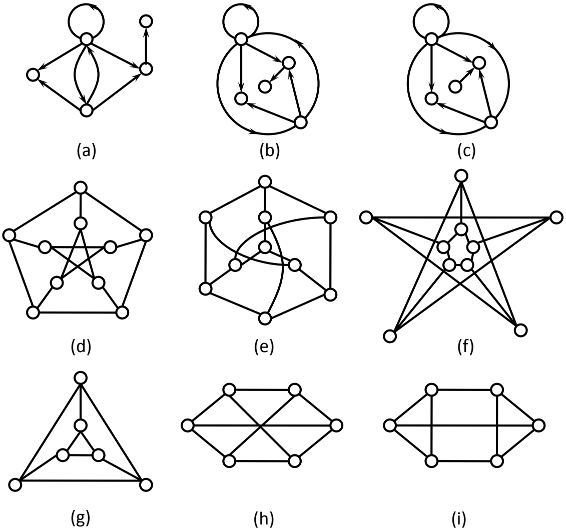
定义

设$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$为两个无向图，若存在双射函数$f : V_1 \to V_2$，对于任意的$v_i, v_j \in V_1$（$f(v_i), f(v_j) \in V_2$），$(v_i, v_j) \in E_1$当且仅当$(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$且$(v_i, v_j)$与$(f(v_i), f(v_j))$ 重数相同，则称G_1与G_2同构，记为$G_1 \cong G_2$。

定义

设$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$为两个有向图，若存在双射函数$f : V_1 \to V_2$，对于任意的$v_i, v_j \in V_1$（$f(v_i), f(v_j) \in V_2$），$\langle v_i, v_j \rangle \in E_1$当且仅当$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$且$\langle v_i, v_j \rangle$与$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle$重数相同，则称$G_1$与$G_2$同构，记为$G_1 \cong G_2$。

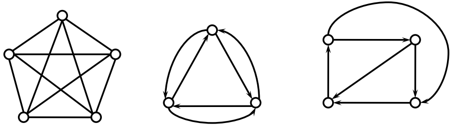
图的同构



完全图和竞赛图

定义

- 设G为n（$n \geq 1$）阶无向简单图，若G中每个顶点均与其余的$n-1$个顶点相邻，则称G为n阶无向完全图，记作K_n。
- 设D为n（$n \geq 1$）阶有向简单图，若对于任意的$v_i, v_j \in V(D)$（$v_i \neq v_j$），均有$\langle v_i, v_j \rangle \in E(D) \wedge \langle v_j, v_i \rangle \in E(D)$，则称$D$为$n$阶有向完全图。
- 设D为n（$n \geq 1$）阶有向简单图，若对于任意的$v_i, v_j \in V(D)$（$v_i \neq v_j$），有向边$\langle v_i, v_j \rangle$和$\langle v_j, v_i \rangle$中有且仅有一个属于$E(D)$，则称D为n阶竞赛图。

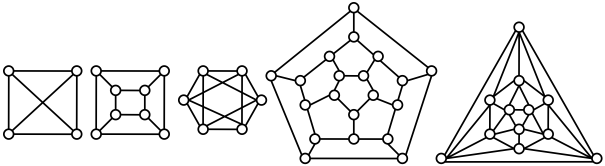


(a)　(b)　(c)

正则图

定义

设G为n（$n \geq 1$）阶无向简单图，若对于任意的$v \in V(G)$，均有$d(v) = k$，则称G为k-正则图。



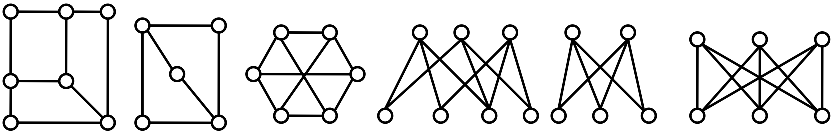
(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

- n阶零图N_n是0-正则图；
- 无向完全图K_n是$(n-1)$-正则图；
- Petersen图是3-正则图；
- 上面的图是Plato图，其中$(a),(b),(d)$为3-正则图，(c)为4-正则图，(e)为5-正则图。

r部图

定义

设$G=\langle V,E\rangle$为一个n阶无向图，若V能分成$r(r\geq 2)$个互不相交的子集$V_1,V_2,\cdots,V_r$，使得G中任何一条边的两个端点都不在同一个V_i（$i=1,2,\cdots,r$）中，则称G为r部图，记为$G=\langle V_1,V_2,\cdots,V_r,E\rangle$。特别地，当$r=2$时，称$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$为二部图（或称偶图）。设$G$是简单$r$部图，若对任意的$i$（$i=1,2,\cdots,r$），$V_i$中任一个顶点均与$V_j(j\neq i)$中所有顶点相邻，则称$G$为完全$r$部图，当$|V_i|=n_i$时，记$G=K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$，当$r=2$时，完全二部图$G=K_{n_1,n_2}$。



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

r部图

在n阶完全r部图$K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$中，$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$，$m=\sum_{i<j} n_i n_j$。当n,r固定后，$n_1,n_2,\cdots,n_r$各取何值时，使得该n阶完全r部图中，边数m达到最大？

对于固定的正整数$n,r(n>r)$，存在$k,s(k\geq 1, 0\leq s<r)$，使得$n=kr+s$，即$n_1=n_2=\cdots=n_s=k+1$，$n_{s+1}=n_{s+2}=\cdots=n_r=k$，此时$K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$的边数最多，即$m$取最大值。
记边数m达到最大值的n阶完全r部图$K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$为$T_r(n)$，它的边数m记为$t_r(n)$。

设$G=\langle V_1,V_2,\cdots,V_r,E\rangle$为任意的$n$阶r部图，设$n_i=|V_i|$，则$G$的边数$m$满足$m\leq\sum_{i<j} n_i n_j\leq t_r(n)$，当$m=t_r(n)$时，必有$G\cong T_r(n)$。

子图

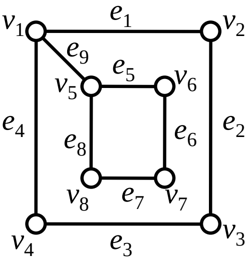
定义

设$G=\langle V,E\rangle$，$G'=\langle V',E'\rangle$为两个图（同为无向图或同为有向图），若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，则称G'是G的子图，G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$。
已知$G'\subseteq G$，又

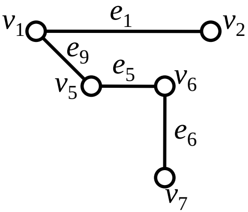
- 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，则称G'是G的真子图；
- 若$V'=V$，则称G'为G的生成子图；

设$G=\langle V,E\rangle$为一图，$V_1\subset V$，且$V_1\neq\emptyset$，称以V_1为顶点集，以G 中两个端点都在V_1中的边组成边集E_1的图，为G的V_1导出的子图，记作$G[V_1]$。
又设$E_1\subset E$且$E_1\neq\emptyset$，称以E_1为边集，以E_1中的边关联的顶点为顶点集V_1的图，为G的E_1导出的子图，记作$G[E_1]$。

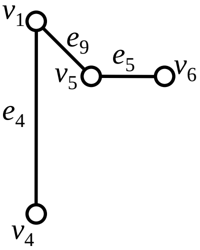
子图


v1
e1
v2
e9
e5
v5
v6
e4
e8
e6
e2
v8
e7
v7
v4
e3
v3

(a)


v1
e1
v2
e9
e5
v5
v6
e6
v7

(b)


v1
e9
e5
v5
v6
e4
v4

(c)

补图

定义

设$G=\langle V,E\rangle$为n阶简单图（无向或有向），称以V为顶点集，以使G成为n阶完全图的所有添加边组成的集合为边集的图为G的补图，记作$\overline{G}$。若$G\cong\overline{G}$，则称G为自补图。

自补图G的阶n应满足什么条件？

图的运算

定义

设$G = \langle V, E\rangle$为一无向图，

1. 设$e \in E$，用$G - e$表示从G中去掉边e，称为删除e。设$E' \subset E$，用$G - E'$表示从G中删除E'中的所有边，称为删除E'。
2. 设$v \in V$，用$G - v$表示从G中去掉v以及v关联的一切边，称为删除顶点v。又设$V' \subset V$，用$G - V'$表示从G中删除V'中的所有顶点，称为删除V'。
3. 设$e = (u, v) \in E$，用$G \backslash e$表示从G中删除e，将e的两个端点u, v用一个新的顶点w代替（w也可取成u或v），使w关联除e外的u, v关联的一切边，称为边e 的收缩。
4. 设$u, v \in V$（u, v可能相邻也可能不相邻），用$G \cup (u, v)$（或$G + (u, v)$）表示在u, v之间加一条边(u, v)，称为加新边。

注意：简单图经过边的收缩或加新边后，可变成非简单图。

图的运算

定义

设$G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$为两个图。

1. 若$V_1 \cap V_2 = \emptyset$，则称G_1与G_2是不交的;
2. 若$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，则称G_1与G_2是边不交的，或边不重的。

图的运算

定义

设$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle, G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$均为无孤立点的图。

1. 称以$E_1 \cup E_2$为边集，以$E_1 \cup E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的并图，记作$G_1 \cup G_2$。
2. 称以$E_1 \cap E_2$为边集，以$E_1 \cap E_2$中边关联的一切顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的交图，记作$G_1 \cap G_2$。
3. 称以$E_1 - E_2$为边集，以$E_1 - E_2$中边关联的一切顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的差图，记作$G_1 - G_2$。
4. 称以$E_1 \oplus E_2$（$\oplus$为对称差运算）为边集，以$E_1 \cup E_2$中边关联的一切顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的环和，记作$G_1 \oplus G_2$。

- 当$G_1 = G_2$时，$G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1(G_2)$，$G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = G_1 \oplus G_2 = \emptyset$（空图）；
- 当G_1与G_2边不重时，$G_1 \cap G_2 = \emptyset$，$G_1 - G_2 = G_1$，$G_2 - G_1 = G_2$，$G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$。

图的运算

定义

设$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle, G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$为两个不交无向图。称以$V = V_1 \cup V_2$为顶点集，以$E = E_1 \cup E_2 \cup \{(u, v) | u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$为边集的图$G$为$G_1$与$G_2$的联图，记作$G = G_1 + G_2$。

由定义可知$K_r + K_s = K_{r+s}$且$N_r + N_s = K_{r,s}$。
若$|V_1| = n_1$，$|E_1| = m_1$，$|V_2| = n_2$，$|E_2| = m_2$，则联图中顶点数$n = n_1 + n_2$，边数$m = m_1 + m_2 + n_1 n_2$。

图的运算

定义

设$G_1=\langle V_1,E_1\rangle, G_2=\langle V_2,E_2\rangle$为两个无向简单图。称以$V=V_1\times V_2$为顶点集，以$E=\{(\langle u_i,u_j\rangle,\langle v_k,v_s\rangle)|\langle u_i,u_j\rangle,\langle v_k,v_s\rangle\in V_1\times V_2\wedge(u_i=v_k\wedge u_j$与$v_s$相邻$\vee u_j=v_s\wedge u_i$与$v_k$相邻$)\}$为边集的图$G$为$G_1$与$G_2$的积图，记作$G=G_1\times G_2$。

若$|V_1|=n_1$，$|E_1|=m_1$，$|V_2|=n_2$，$|E_2|=m_2$，则积图中顶点数$n=n_1n_2$，边数$m=n_1m_2+n_2m_1$。

图的运算

用$0,1$分别表示K_2的两个端点，令

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= K_2, \\
Q_2 &= K_2 \times Q_1, \\
&\cdots \\
Q_k &= K_2 \times Q_{k-1}, k \geq 3
\end{aligned}
$$

则称Q_k为k-方体图。

图

- 图的基本概念
- 通路与回路

无向图中的通路与回路

定义

设G为无向标定图，G中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$称为顶点$v_{i_0}$到顶点$v_{i_l}$的**通路**，其中$v_{i_{r-1}}, v_{i_r}$ 为e_{j_r}的端点，$r = 1, 2, \cdots, l$，v_{i_0}, v_{i_l}分别称为Γ的**始点**和**终点**，Γ中边数l称为Γ的长度。若$v_{i_0} = v_{i_l}$，则称通路Γ 为**回路**。

若Γ的所有边各异，则称Γ为**简单通路**，此时若$v_{i_0} = v_{i_l}$，则称Γ为**简单回路**。

若Γ的所有顶点（除v_{i_0}与v_{i_l}可能相同外）各异，所有边也各异，则称Γ为**初级通路**，或称Γ为一条**路径**，此时若$v_{i_0} = v_{i_l}$，则称Γ为**初级回路**或**圈**，并将长度为奇数的圈称为**奇圈**，长度为偶数的圈称为**偶圈**。

若Γ中有边重复出现，则称Γ为**复杂通路**，又此时若$v_{i_0} = v_{i_l}$，则称Γ为**复杂回路**。

有向图中通路、回路及其分类的定义与无向图类似，只是注意有向图中通路与回路中有向边方向的一致性，即在$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$中，$v_{i_{r-1}}$必为$e_{j_r}$的始点，而$v_{i_r}$必为$e_{j_r}$的终点，$r = 1, 2, \cdots, l$，并且初级回路也简称为圈。

通路与回路的表示法

定义中通路（回路）表示为顶点与边的交替序列，除此之外还有如下的简便方法表示通路与回路:

1. 用边的序列表示通路（回路）。上一定义中的$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$可以表示为$e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l}$。
2. 在简单图中用顶点的序列表示通路（回路）。前面的Γ在简单图中可表示为$v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_l}$。
3. 为了写出非标定图中的通路（回路），将非标定图先标成标定图，或只标定所求通路（回路），然后再写出通路（回路）。
4. 将图中的通路（回路）在图外重新画出。

图的周长与围长

定义

在含圈的无向简单图G中，称G中最长圈的长度为G的周长，记作$c(G)$，称G中最短圈的长度为G的围长，记作$g(G)$。

例

- 无向完全图$K_n(n \geq 3)$的周长为n，围长为3。
- 完全二部图$K_{n,n}(n \geq 2)$的周长为$2n$，围长为4。

通路与回路的性质

定理

在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j 存在长度小于等于$n-1$的通路。

推论

在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j 存在长度小于等于$n-1$的路径。

定理

在n阶图G中，若存在从顶点v_i到自身的回路，则存在从v_i到自身长度小于等于n的回路。

推论

在n阶图G中，若存在从顶点v_i到自身的简单回路，则一定存在v_i到自身的长度小于等于n的初级回路（圈）。

扩大路径法

设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向图，$E\neq\emptyset$，设$\Gamma_l=v_0v_1\cdots v_l$为$G$中的一条路径，若始点$v_0$与$\Gamma_l$外的某顶点相邻，就将该顶点及关联的边扩到$\Gamma_l$中来，若新路径的始点还与新的路径外的顶点相邻，就再将它及其相关联的边扩到新的路径中来，得到更新的路径，继续这一过程，直到最后所得路径的始点不与其它所有路径外的任何顶点相邻为止，设终止时的路径为$\Gamma_{l+k}=v_0v_1\cdots v_{l+k}$，$k\geq 0$。再对$\Gamma_{l+k}$的终点$v_{l+k}$继续上述过程，设最终得到的路径为$\Gamma_{l+k+r}=v_0v_1\cdots v_{l+k+r}$，$k,r\geq 0$，它的始点$v_0$与终点$v_{l+k+r}$不与$\Gamma_{l+k+r}$外的任何顶点相邻。则称$\Gamma_{l+k+r}$为“极大路径”，并称用构造极大路径证明定理或命题的方法为“扩大路径法”。

类似地，可以在有向图D中构造“极大路径”，只需注意，当从路径的始点v_0扩大时，需要找Γ外的邻接到v_0的顶点，而从路径的终点v_l扩大时，需要找Γ外的邻接于v_l的顶点。

扩大路径法

例

设G为n（$n \geq 3$）阶无向简单图，$\delta(G) \geq 2$，证明G中存在长度大于等于3的圈。

扩大路径法

例

设$D=\langle V,E\rangle$为有向简单图，$\delta(D)\geq 2$，且$\delta^-(D)>0$，$\delta^+(D)>0$，证明D中存在长度大于等于$\max\{\delta^-(D),\delta^+(D)\}+1$的圈。