集合论与图论
第七讲　序数

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/~sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.4.9

序数

- 关于序关系的进一步讨论
- 超限递归定理
- 序数
- 关于基数的进一步讨论

良序关系的直观描述

设$\langle A, \prec\rangle$为一个良序集，则A关于良序关系$\prec$有一个最小元，记为t_0，若A 的子集$A-\{t_0\}\neq\emptyset$，则它又有最小元，记为t_1，再考虑A的子集$A-\{t_0, t_1\}$，若它非空，又得到最小元，记为t_2，继续这一过程，得

$$t_0 \prec t_1 \prec t_2 \prec \cdots$$

若$A-\{t_0, t_1, \cdots\}\neq\emptyset$，还得到它的最小元，记为$t_N$，直到用完$A$中全体元素为止，将$A$中元素排成如下形式:

$$t_0 \prec t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_N \prec t_{N+1} \prec \cdots$$

这就是良序集的直观描述。

良序集的性质

定理

设$\langle A, \prec\rangle$为拟序集，$\prec$为$A \neq \emptyset$上的良序关系当且仅当不存在函数$f : \mathbb{N} \to A$，使得对于任意的$n \in \mathbb{N}$，有$f(n^+) \prec f(n)$。

拟序集的前节

定义

设$\langle A, \prec\rangle$为一个拟序集，称$\operatorname{seg} t = \{x | x \in A \wedge x \prec t\}$为$t$的**前节**。

例

1. 在拟序集$\langle \mathbb{R}, <\rangle$上，$\operatorname{seg} 0 = (-\infty, 0)$，$\operatorname{seg} 1 = (-\infty, 1)$，$\operatorname{seg} \frac{1}{2} = (-\infty, \frac{1}{2})$，$\cdots$
2. 在良序集$\langle \mathbb{N}, <\rangle$上，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\operatorname{seg} n = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < n\} = n$。

拟序集的同构

定义

设$\langle A, \prec_1\rangle$、$\langle B, \prec_2\rangle$为两个拟序集，若存在双射函数$f: A \to B$，满足如下条件：对于任意的$x \in A$，$y \in A$，$x \prec_1 y$当且仅当$f(x) \prec_2 f(y)$，则称称$\langle A, \prec_1\rangle$、$\langle B, \prec_2\rangle$为同构的，记作$\langle A, \prec_1\rangle \cong \langle B, \prec_2\rangle$，称$f$是$\langle A, \prec_1\rangle$到$\langle B, \prec_2\rangle$上的同构。也称

$$x \prec_1 y \Leftrightarrow f(x) \prec_2 f(y)$$

为保序性。

例

良序集$\langle\{1,3,5\},<\rangle$和$\langle\{0,1,2\},\subset\rangle$是同构的，可取$f: \{1,3,5\} \to \{0,1,2\}$为：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 1, & x = 3, \\ 2, & x = 5 \end{cases}$$

易知f是$\langle\{1,3,5\},<\rangle$到$\langle\{0,1,2\},\subset\rangle$的同构。

同构的自反性、对称性和传递性

定理

设$\langle A, \prec_1\rangle$、$\langle B, \prec_2\rangle$、$\langle C, \prec_3\rangle$为三个拟序集，则

1. $\langle A, \prec_1\rangle \cong \langle A, \prec_1\rangle$;
2. 若$\langle A, \prec_1\rangle \cong \langle B, \prec_2\rangle$，则$\langle B, \prec_2\rangle \cong \langle A, \prec_1\rangle$;
3. 若$\langle A, \prec_1\rangle \cong \langle B, \prec_2\rangle$且$\langle B, \prec_2\rangle \cong \langle C, \prec_3\rangle$，则$\langle A, \prec_1\rangle \cong \langle C, \prec_3\rangle$。

序关系

定理

设$f : A \to B$为单射，$\prec_B$为B上的拟序关系，在A上定义关系$\prec_A$如下：对于任意的$x, y \in A$，$x \prec_A y \Leftrightarrow f(x) \prec_B f(y)$，则

1. $\prec_A$为A上的拟序关系；
2. 若$\prec_B$为B上的拟线序（拟全序）关系，则$\prec_A$为A上的拟线序关系；
3. 若$\prec_B$为B上的良序关系，则$\prec_A$为A上的良序关系。

推论

设$\langle A, \prec_A \rangle$、$\langle B, \prec_B \rangle$为两个拟序集，且$\langle A, \prec_A \rangle \cong \langle B, \prec_B \rangle$，则

1. 若其中之一为拟线序集，则另一个也为拟线序集；
2. 若其中之一为良序集，则另一个也为良序集。

序关系

定理

设A、B为二集合，且$B \subseteq A$。

1. 若$\prec_A$为A上的拟序关系，则$\prec_A \upharpoonright B$为$B$上的拟序关系；
2. 若$\prec_A$为A上的拟线序关系，则$\prec_A \upharpoonright B$为$B$上的拟线序关系；
3. 若$\prec_A$为A上的良序关系，则$\prec_A \upharpoonright B$为$B$上的良序关系。

序数

- 关于序关系的进一步讨论
- **超限递归定理**
- 序数
- 关于基数的进一步讨论

超限递归定理

定义

设$\prec$为集合A上的拟线序关系，$B\subseteq A$，若$\forall t(t\in A\wedge \operatorname{seg} t\subseteq B\rightarrow t\in B)$为真，则称$B$是$A$的关于$\prec$的归纳子集。

定理

设$\prec$为A上的良序，B是A关于$\prec$的归纳子集，则$B=A$。

定理中“$\prec$为A上的良序”条件是必要的吗？
考虑拟线序集$\langle\mathbb{R},<\rangle$，其中$<$是小于关系，不难验证$B=(-\infty,0]$是$\mathbb{R}$关于$<$的归纳子集，但$B\neq A$。

归纳子集与良序关系

定理

设$\prec$为A上的拟线序，如果对于A上的任何关于$\prec$的归纳子集都与A是相等的，则$\prec$为A上的良序。

超限递归定理模式

对于任意的公式$\gamma(x,y)$，下面所叙述的是一条定理:

设$\prec$为集合A上的良序，若$\forall f \exists ! y \gamma(f,y)$成立，则存在惟一的一个以$A$为定义域的函数$F$，$\forall t \in A$，$\gamma(F \upharpoonright \operatorname{seg} t, F(t))$成立。

$\gamma(x,y)$的任意性决定了超限递归定理模式可以构造出无穷多条定理。

定义

对任意的$t \in A$，若一函数v以$\{x | x \preccurlyeq t\}$为定义域，并且对于任意的$x \in dom v$，$\gamma(v \upharpoonright \operatorname{seg} x, v(x))$成立，则称$v$是直到$t$被$\gamma$构造的函数。

替换公理:

公理

对于任意的公式$\varphi(x,y)$，B在$\varphi(x,y)$中不出现，则有下面的公理:

$$\forall A(\forall x \forall y_1 \forall y_2(x \in A \wedge \varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \longrightarrow y_1 = y_2) \longrightarrow \exists B \forall y(y \in B \longleftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \varphi(x,y))))$$

超限递归定理模式

定理

设$\langle A, \prec_A \rangle$、$\langle B, \prec_B \rangle$为两个良序集，则下面三种情况至少成立其一:

1. $\langle A, \prec_A \rangle \cong \langle B, \prec_B \rangle$;
2. $\langle A, \prec_A \rangle \cong \langle \operatorname{seg} b, \prec_B^0 \rangle, b \in B$;
3. $\langle \operatorname{seg} a, \prec_A^0 \rangle \cong \langle B, \prec_B \rangle, a \in A$。

其中$\prec_A^0, \prec_B^0$分别为$\prec_A$在$\operatorname{seg} a$上的限制和$\prec_B$在$\operatorname{seg} b$上的限制。

本定理说明，任何两个良序集，或者它们是同构的，或者一个与另一个的某个前节是同构的。

序数

- 关于序关系的进一步讨论
- 超限递归定理
- 序数
- 关于基数的进一步讨论

良序集的$\in$-象

定理

设$\prec$为集合A上的良序，则惟一存在一个以A为定义域的函数E，使得对于任意的$t \in A$，$E(t) = ran(E \upharpoonright \text{seg}\, t) = \{E(x) | x \prec t\}$。

定义

设$\langle A, \prec \rangle$为良序集，E为上一定理中定义的函数，令$\alpha = ranE$，则称α为良序集$\langle A, \prec \rangle$的$\in$-象，并称E为前段值域函数。

例

求以下各良序集的$\in$-象$ranE$:

1. $\langle A, \prec \rangle$，其中$A = \{a, b, c\}, a \prec b \prec c$;
2. $\langle B, \prec \rangle$，其中$B = \{1, 2, 3\}, \prec$为小于关系;
3. $\langle C, \prec \rangle$，其中$C = \{a, d, e, h\}, a \prec d \prec e \prec h$。

前段值域函数和$\in$-象的性质

定理

设$\langle A,\prec\rangle$为良序集，E为前段值域函数，α为$\langle A,\prec\rangle$的$\in$-象，则

1. $\forall t\in A, E(t)\notin E(t)$;
2. E为A与α之间的双射函数;
3. $\forall s,t\in A, s\prec t\Leftrightarrow E(s)\in E(t)$;
4. $\alpha=ranE$是传递集。

定理

两个良序集是同构的当且仅当它们具有相同的$\in$-象。

序数的定义

定义

设$\prec$为集合A上的良序，称良序集$\langle A,\prec\rangle$的$\in$-象为$\langle A,\prec\rangle$ 的序数，如果一个集合是某个良序集的序数，则称这个集合为序数。

定理

同构的良序集具有相同的序数。

例

判断下面三个拟线序集中哪些是良序集，并求良序集的序数。

1. $\langle A,<\rangle$，$A=\{1,2,3,5,7,8\}$，$<$为小于关系；
2. $\langle B,\prec\rangle$，$B=\{2,3,6,12,24,36\}$，$\prec=\preccurlyeq -I_B$，其中$\preccurlyeq$为整除关系；
3. $\langle C,\prec\rangle$，$C=\{1,2,4,8,16,32\}$，$\prec=\preccurlyeq -I_C$，其中$\preccurlyeq$为整除关系。

按属于关系良序

定义

设A为一集合，A上的二元关系$\in_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x \in y\}$，若$\in_A$是$A$上的良序，则称$A$按属于关系是良序的。

定理

设α按属于关系是良序的，并且α是传递集，则α是一个序数（即α是$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$的$\in$-象）。

例

判断下列集合哪些按属于关系是良序的，若是则求相应良序集的序数。

(1) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;　(2) $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$;

(3) $C = \{0, 1, 2, 3, \{4\}\}$;　(4) $D = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$;

(5) $E = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

序数的性质

定理

设α, β, γ为三个序数，则

1. α的元素为序数（即任何序数的元素还是序数，也即序数是传递集）；
2. $\alpha \notin \alpha$（反自反性）；
3. 若$\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma$，则$\alpha \in \gamma$（传递性）；
4. $\alpha \in \beta, \alpha = \beta, \beta \in \alpha$有且仅有一式成立（序数之间具有三歧性）；
5. 由序数构成的非空集，按属于关系有最小元。

序数的性质

定义

设α,β为两个序数，若$\alpha\in\beta$，则称α小于β，记作$\alpha<\beta$，又称β大于α，记作$\beta>\alpha$。

定理

设α,β为任意两个序数，$\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$三式成立且仅成立一式。

定理

1. 任何以序数为元素的传递集合是序数;
2. 0是序数;
3. 若α是序数，则$\alpha^+=\alpha\cup\{\alpha\}$是序数;
4. 若集合A是以序数为元素的集合，则$\cup A$是序数。

序数的性质

定理

1. 一切自然数都是序数。
2. 自然数集合$\mathbb{N}$是序数，当$\mathbb{N}$作为序数时，将它记作ω，ω^+, ω^{++}, $\omega^{+++}, \cdots$是序数。
3. 设A是以序数为元素的集合，则$\bigcup A$为A的关于属于等于关系的最小上界。
4. 设α为一序数，则α^+是大于α的最小序数。
5. 任何序数都是比它小的所有序数组成的集合，即设α为序数，则$\alpha = \{x \mid x是序数 \wedge x < \alpha\}$。

Burali-Forti定理

定理

不存在一个集合，使得所有的序数都属于它。

后继序数

定义

设α为一个序数，若存在序数β使得$\alpha=\beta^+$，则称α为后继序数。

显然$1,2,3,\cdots$是后继序数，$\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega\cdot 2+1,\omega\cdot 2+2,\cdots,$ $\omega\cdot n+1,\omega\cdot n+2,\cdots$也都是后继序数。
0不是后继序数，$\omega,\omega\cdot 2,\omega\cdot 3,\cdots,\omega^2,\omega^3,\cdots,\omega^\omega,\omega^{\omega^\omega},\cdots$都不是后继序数。
根据以上讨论，序数可以分为三类:

1. 0;
2. 后继序数;
3. 极限序数，不是第一和第二类的序数都是极限序数，如$\omega,\omega\cdot 2,$ $\cdots$都是极限序数。

序数

- 关于序关系的进一步讨论
- 超限递归定理
- 序数
- 关于基数的进一步讨论

Hartogs定理

定理

对于任何集合A，都存在序数α，使得$A \not\preccurlyeq \cdot\, \alpha$。

良序定理

定理

对于任何集合A，都存在A上的一个良序。

命数定理

定理

对于任何集合A，都存在序数α，使得$A \approx \alpha$。

命数定理保证了下面定义的有效性:

定义

设A为一个集合，称与A等势的最小序数为A的基数，记作$\mathrm{card}A$。
设α为一个序数，若存在集合A，使得$\mathrm{card}A = \alpha$，则称α为基数。

由此定义易证如下定理:

定理

1. 对于任意的集合A和B，$\mathrm{card}A = \mathrm{card}B \iff A \approx B$;
2. 对于任意的有穷集合A，$\mathrm{card}A$是与A等势的惟一的自然数。