集合论与图论
第六讲　基数（势）

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/~sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.4.2

基数（势）

- **集合的等势**
- 有穷集合与无穷集合
- 基数
- 基数运算

集合的等势

定义

设A, B为两个集合，若存在从A到B的双射函数，则称A与B是等势的，记作$A \approx B$。

例

设$\mathbb{N}_{偶} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n为偶数\}$，$\mathbb{N}_{奇} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n为奇数\}$，$\mathbb{N}_{2^n} = \{x \mid x = 2^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$，则$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{偶}$，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{奇}$，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{2^n}$。

解： 取$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{偶}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$f(n) = 2n$；$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{奇}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$g(n) = 2n + 1$；$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{2^n}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$h(n) = 2^n$。易知$f, g, h$都是双射函数，因而

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{偶}, \qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{奇}, \qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{2^n}.$$

集合的等势

定义

设A, B为两个集合，若存在从A到B的双射函数，则称A与B是等势的，记作$A \approx B$。

例

设$\mathbb{N}_{偶} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n为偶数\}$，$\mathbb{N}_{奇} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n为奇数\}$，$\mathbb{N}_{2^n} = \{x \mid x = 2^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$，则$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{偶}$，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{奇}$，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{2^n}$。

解：取$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{偶}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$f(n) = 2n$；$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{奇}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$g(n) = 2n + 1$；$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{2^n}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$h(n) = 2^n$。易知$f, g, h$都是双射函数，因而

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{偶}, \qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{奇}, \qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{2^n}.$$

集合的等势

定义

设A, B为两个集合，若存在从A到B的双射函数，则称A与B是等势的，记作$A \approx B$。

例

设$\mathbb{N}_{偶} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n为偶数\}$，$\mathbb{N}_{奇} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n为奇数\}$，$\mathbb{N}_{2^n} = \{x \mid x = 2^n \land n \in \mathbb{N}\}$，则$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{偶}$，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{奇}$，$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{2^n}$。

解：取$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{偶}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$f(n) = 2n$；$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{奇}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$g(n) = 2n + 1$；$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{2^n}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$h(n) = 2^n$。易知$f, g, h$都是双射函数，因而

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{偶}, \qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{奇}, \qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}_{2^n}.$$

集合的等势

定理

(1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$; (2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$; (3) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$; (4) $(0,1) \approx \mathbb{R}$; (5) $[0,1] \approx (0,1)$。

证明：(1) 取$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$，且$\forall n \in \mathbb{Z}$，

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2n, & n > 0 \\ 2|n| - 1, & n < 0 \end{cases}$$

显然f是$\mathbb{Z}$到$\mathbb{N}$的双射函数，所以$\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$。
(2) 取$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$\forall i, j \in \mathbb{N}$，$f(\langle i, j \rangle) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$是$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的双射函数，故$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$。

集合的等势

定理

(1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$; (2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$; (3) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$; (4) $(0,1) \approx \mathbb{R}$; (5) $[0,1] \approx (0,1)$。

证明： (1) 取$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$，且$\forall n \in \mathbb{Z}$，

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2n, & n > 0 \\ 2|n| - 1, & n < 0 \end{cases}$$

显然f是$\mathbb{Z}$到$\mathbb{N}$的双射函数，所以$\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$。

(2) 取$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$\forall i, j \in \mathbb{N}$，$f(\langle i, j \rangle) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$是$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的双射函数，故$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$。

集合的等势

定理

(1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$; (2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$; (3) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$; (4) $(0,1) \approx \mathbb{R}$; (5) $[0,1] \approx (0,1)$。

证明： (1) 取$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$，且$\forall n \in \mathbb{Z}$，

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2n, & n > 0 \\ 2|n| - 1, & n < 0 \end{cases}$$

显然f是$\mathbb{Z}$到$\mathbb{N}$的双射函数，所以$\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$。
(2) 取$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$\forall i, j \in \mathbb{N}$，$f(\langle i, j \rangle) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$是$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的双射函数，故$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$。

集合的等势

(3) 因为任何有理数都可以表示为分数，因而，对任意$n \in \mathbb{N}-\{0\}$，列出$\frac{m}{n}$，$m \in \mathbb{Z}$，见下图。从中找出全体既约分数，它们表示出了全体有理数，按图中所示路线将自然数与全体有理数一一对应起来，即$\forall n \in \mathbb{N}$，$f(n)$为$[n]$旁边的有理数，易知f是双射的，所以$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$。

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
\cdots & \leftarrow & -3/1^{[18]} & & -2/1^{[5]} & \leftarrow & -1/1^{[4]} & & 0/1^{[0]} & \rightarrow & 1/1^{[1]} & & 2/1^{[10]} & \rightarrow & 3/1^{[11]} & \cdots \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & & -3/2^{[17]} & & -2/2 & & -1/2^{[3]} & \leftarrow & 0/2 & \leftarrow & 1/2^{[2]} & & 2/2 & & 3/2^{[12]} & \cdots \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & & -3/3 & & -2/3^{[6]} & \rightarrow & -1/3^{[7]} & \rightarrow & 0/3 & \rightarrow & 1/3^{[8]} & \rightarrow & 2/3^{[9]} & & 3/3 & \cdots \\
 & & \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
\cdots & & -3/4^{[16]} & \leftarrow & -2/4 & \leftarrow & -1/4^{[15]} & \leftarrow & 0/4 & \leftarrow & 1/4^{[14]} & \leftarrow & 2/4 & \leftarrow & 3/4^{[13]} & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

集合的等势

(4) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$，$\forall x\in(0,1)$，$f(x)=tan\pi(\frac{2x-1}{2})$，则$f$是$(0,1)$到$\mathbb{R}$的双射函数，所以$(0,1)\approx\mathbb{R}$。

(5) $f:[0,1]\to(0,1)$，$\forall x\in[0,1]$，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ \frac{1}{2^{n+2}}, & x=\frac{1}{2^n}, n\geq 1\\ x, & \text{其他。}\end{cases}$$

易证f是$[0,1]$到$(0,1)$的双射函数，从而$[0,1]\approx(0,1)$。

集合的等势

(4) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$，$\forall x\in(0,1)$，$f(x)=tan\pi(\frac{2x-1}{2})$，则$f$是$(0,1)$到$\mathbb{R}$的双射函数，所以$(0,1)\approx\mathbb{R}$。

(5) $f:[0,1]\to(0,1)$，$\forall x\in[0,1]$，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ \frac{1}{2^{n+2}}, & x=\frac{1}{2^n}, n\geq 1\\ x, & \text{其他。}\end{cases}$$

易证f是$[0,1]$到$(0,1)$的双射函数，从而$[0,1]\approx(0,1)$。

集合的等势

定理

设A为任意的集合，则$\mathcal{P}(A) \approx (A \to \mathbf{2})$。其中$(A \to \mathbf{2})$为$\mathbf{2}^A$，即$A$到$\mathbf{2} = \{0, 1\}$的全体函数。

定理

设A, B, C为任意集合，则

1. $A \approx A$;
2. 若$A \approx B$，则$B \approx A$;
3. 若$A \approx B$且$B \approx C$，则$A \approx C$。

集合的等势

定理

设A为任意的集合，则$\mathcal{P}(A) \approx (A \to \mathbf{2})$。其中$(A \to \mathbf{2})$为$\mathbf{2}^A$，即$A$到$\mathbf{2} = \{0, 1\}$的全体函数。

定理

设A, B, C为任意集合，则

1. $A \approx A$;
2. 若$A \approx B$，则$B \approx A$;
3. 若$A \approx B$且$B \approx C$，则$A \approx C$。

康托定理

定理

(1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$;
(2) 设A为任意的集合，则$A \not\approx \mathcal{P}(A)$。

基数（势）

- 集合的等势
- **有穷集合与无穷集合**
- 基数
- 基数运算

有穷集合与无穷集合

定义

若一个集合A与某个自然数n等势，即$A \approx n$，则称A是有穷集合，否则称A 是无穷集合。

定理

不存在与自己的真子集等势的自然数。

有穷集合与无穷集合

定义

若一个集合A与某个自然数n等势，即$A \approx n$，则称A是有穷集合，否则称A 是无穷集合。

定理

不存在与自己的真子集等势的自然数。

有穷集合与无穷集合

推论

不存在与自己的真子集等势的有穷集合。

推论

(1) 任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集。
(2) $\mathbb{N}$是无穷集。

推论

任何有穷集合都与惟一的自然数等势。

有穷集合与无穷集合

推论

不存在与自己的真子集等势的有穷集合。

推论

(1) 任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集。
(2) $\mathbb{N}$是无穷集。

推论

任何有穷集合都与惟一的自然数等势。

有穷集合与无穷集合

推论

不存在与自己的真子集等势的有穷集合。

推论

(1) 任何与自己的真子集等势的集合都是无穷集。
(2) $\mathbb{N}$是无穷集。

推论

任何有穷集合都与惟一的自然数等势。

有穷集合与无穷集合

定理

任何有穷集合的子集仍为有穷集合。

引理

设c为自然数n的真子集，则c与某个属于n的自然数等势。

有穷集合与无穷集合

定理

任何有穷集合的子集仍为有穷集合。

引理

设c为自然数n的真子集，则c与某个属于n的自然数等势。

基数（势）

- 集合的等势
- 有穷集合与无穷集合
- 基数
- 基数运算

基数

- 对于有穷集合A，A中的元素个数表示为$|A|$。
- 设A为任意一个集合，A中的元素“个数”表示为$\mathrm{card}A$，称$\mathrm{card}A$为A的基数，并作以下5条规定：
  1. 对于任意集合A和B，规定$\mathrm{card}A = \mathrm{card}B$当且仅当$A \approx B$。
  2. 对于任意有穷集合A，规定与A等势的自然数n为A的基数，记作$\mathrm{card}A = n$。
  3. 对于自然数集合$\mathbb{N}$，规定$\mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0$。
  4. 对于实数集合$\mathbb{R}$，规定$\mathrm{card}\mathbb{R} = \aleph$。
  5. 将$0, 1, 2, \cdots, \aleph_0, \aleph$都称做基数，其中，自然数$0, 1, 2, \cdots$称作有穷基数，而$\aleph_0, \aleph$称作无穷基数。并规定用希腊字母$\kappa$、$\lambda$和$\mu$等表示任意的基数。

基数

例

设集合$A=\{a,b,c\}$，$B=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$\mathbb{N}_{偶}=\{n\mid n\in\mathbb{N}\wedge n为偶数\}$，$\mathbb{N}_{奇}=\{n\mid n\in\mathbb{N}\wedge n为奇数\}$，按基数的5条规定可知:

$$\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=3$$
$$\mathrm{card}\mathbb{N}_{偶}=\mathrm{card}\mathbb{N}_{奇}=\mathrm{card}\mathbb{N}=\aleph_0$$
$$\mathrm{card}[0,1]=\mathrm{card}(0,1)=\mathrm{card}\mathbb{R}=\aleph$$

定义

设κ为任意基数，令$K_\kappa=\{x\mid x是集合且\mathrm{card}x=\kappa\}$。当$\kappa=0$时，$K_0=\{\emptyset\}$为一个集合，当$\kappa\neq 0$时，称$K_\kappa$为基数为$\kappa$的集合的类，而不称$K_\kappa$为集合。

基数

例

设集合$A=\{a,b,c\}$，$B=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$\mathbb{N}_{偶}=\{n\mid n\in\mathbb{N}\wedge n为偶数\}$，$\mathbb{N}_{奇}=\{n\mid n\in\mathbb{N}\wedge n为奇数\}$，按基数的5条规定可知:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=3\\
&\mathrm{card}\mathbb{N}_{偶}=\mathrm{card}\mathbb{N}_{奇}=\mathrm{card}\mathbb{N}=\aleph_0\\
&\mathrm{card}[0,1]=\mathrm{card}(0,1)=\mathrm{card}\mathbb{R}=\aleph
\end{aligned}$$

定义

设κ为任意基数，令$K_\kappa=\{x\mid x是集合且\mathrm{card}x=\kappa\}$。当$\kappa=0$时，$K_0=\{\emptyset\}$为一个集合，当$\kappa\neq 0$时，称$K_\kappa$为基数为$\kappa$的集合的类，而不称$K_\kappa$为集合。

基数的比较

定义

设A, B为任意二集合，

1. 若存在$f : A \to B$且f是单射的，则称B优势于A，或称A劣势于B，记作$A \preccurlyeq\cdot B$。
2. 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$A \not\approx B$，则称B绝对优势于A，或称A绝对劣势于B，记作$A \prec\cdot B$。

定理

设A, B为二集合，则$A \preccurlyeq\cdot B$当且仅当存在$C \subseteq B$，使得$A \approx C$。

推论

设A, B为二集合，
(1) 若$A \subseteq B$，则$A \preccurlyeq\cdot B$;
(2) 若$A \approx B$，则$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$。

基数的比较

定义

设A, B为任意二集合，

1. 若存在$f: A \to B$且f是单射的，则称B优势于A，或称A劣势于B，记作$A \preccurlyeq\cdot B$。
2. 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$A \not\approx B$，则称B绝对优势于A，或称A绝对劣势于B，记作$A \prec\cdot B$。

定理

设A, B为二集合，则$A \preccurlyeq\cdot B$当且仅当存在$C \subseteq B$，使得$A \approx C$。

推论

设A, B为二集合，

(1) 若$A \subseteq B$，则$A \preccurlyeq\cdot B$;

(2) 若$A \approx B$，则$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$。

基数的比较

定义

设A, B为任意二集合，

1. 若存在$f: A \to B$且f是单射的，则称B优势于A，或称A劣势于B，记作$A \preccurlyeq\cdot B$。
2. 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$A \not\approx B$，则称B绝对优势于A，或称A绝对劣势于B，记作$A \prec\cdot B$。

定理

设A, B为二集合，则$A \preccurlyeq\cdot B$当且仅当存在$C \subseteq B$，使得$A \approx C$。

推论

设A, B为二集合，
(1) 若$A \subseteq B$，则$A \preccurlyeq\cdot B$;
(2) 若$A \approx B$，则$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$。

基数的比较

定理

设A, B, C, D为4个集合，已知$A \preccurlyeq\cdot B$，$C \preccurlyeq\cdot D$，则

(1) 若$B \cap D = \emptyset$，则$A \cup C \preccurlyeq\cdot B \cup D$;

(2) $A \times C \preccurlyeq\cdot B \times D$。

定理

设A, B, C为3个集合。

(1) $A \preccurlyeq\cdot A$;

(2) 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot C$，则$A \preccurlyeq\cdot C$。

基数的比较

定理

设A, B, C, D为4个集合，已知$A \preccurlyeq \cdot B$，$C \preccurlyeq \cdot D$，则
(1) 若$B \cap D = \emptyset$，则$A \cup C \preccurlyeq \cdot B \cup D$;
(2) $A \times C \preccurlyeq \cdot B \times D$。

定理

设A, B, C为3个集合。
(1) $A \preccurlyeq \cdot A$;
(2) 若$A \preccurlyeq \cdot B$且$B \preccurlyeq \cdot C$，则$A \preccurlyeq \cdot C$。

基数的次序

定理

设A, B, C, D为4个集合，且$\mathrm{card}A = \mathrm{card}C = \kappa$，$\mathrm{card}B = \mathrm{card}D = \lambda$，则$A \preccurlyeq\cdot B$当且仅当$C \preccurlyeq\cdot D$。

定义

设κ, λ为二基数，A, B为二集合，且$\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$，则

1. $\kappa \leq \lambda$当且仅当$A \preccurlyeq\cdot B$;
2. $\kappa < \lambda$当且仅当$A \prec\cdot B$。

基数的次序

定理

设A, B, C, D为4个集合，且$\mathrm{card}A = \mathrm{card}C = \kappa$，$\mathrm{card}B = \mathrm{card}D = \lambda$，则$A \preccurlyeq\cdot B$当且仅当$C \preccurlyeq\cdot D$。

定义

设κ, λ为二基数，A, B为二集合，且$\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$，则

1. $\kappa \leq \lambda$当且仅当$A \preccurlyeq\cdot B$;
2. $\kappa < \lambda$当且仅当$A \prec\cdot B$。

基数的次序

例

设κ, λ为二基数，若$\kappa \leq \lambda$，则存在集合A和B，使得$A \subseteq B$ 且$\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$。

例

(1) 设κ为任意一个基数，则$0 \leq \kappa$;
(2) 设n为自然数，则$n < \aleph_0$。

定理

设A为任意集合，则$\mathrm{card}A < \mathrm{card}\mathcal{P}(A)$。

例

设κ, λ, μ为3个基数，则
(1) $\kappa \leq \kappa$;
(2) 若$\kappa \leq \lambda$且$\lambda \leq \mu$，则$\kappa \leq \mu$。

基数的次序

例

设κ, λ为二基数，若$\kappa \le \lambda$，则存在集合A和B，使得$A \subseteq B$ 且$\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$。

例

(1) 设κ为任意一个基数，则$0 \le \kappa$;
(2) 设n为自然数，则$n < \aleph_0$。

定理

设A为任意集合，则$\mathrm{card}A < \mathrm{card}\mathcal{P}(A)$。

例

设κ, λ, μ为3个基数，则
(1) $\kappa \le \kappa$;
(2) 若$\kappa \le \lambda$且$\lambda \le \mu$，则$\kappa \le \mu$。

基数的次序

例

设κ, λ为二基数，若$\kappa \leq \lambda$，则存在集合A和B，使得$A \subseteq B$ 且$\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$。

例

(1) 设κ为任意一个基数，则$0 \leq \kappa$;
(2) 设n为自然数，则$n < \aleph_0$。

定理

设A为任意集合，则$\mathrm{card}A < \mathrm{card}\mathcal{P}(A)$。

例

设κ, λ, μ为3个基数，则
(1) $\kappa \leq \kappa$;
(2) 若$\kappa \leq \lambda$且$\lambda \leq \mu$，则$\kappa \leq \mu$。

基数的次序

例

设κ, λ为二基数，若$\kappa \leq \lambda$，则存在集合A和B，使得$A \subseteq B$ 且$\mathrm{card}A = \kappa$，$\mathrm{card}B = \lambda$。

例

(1) 设κ为任意一个基数，则$0 \leq \kappa$;
(2) 设n为自然数，则$n < \aleph_0$。

定理

设A为任意集合，则$\mathrm{card}A < \mathrm{card}\mathcal{P}(A)$。

例

设κ, λ, μ为3个基数，则
(1) $\kappa \leq \kappa$;
(2) 若$\kappa \leq \lambda$且$\lambda \leq \mu$，则$\kappa \leq \mu$。

Schröder-Bernstein定理

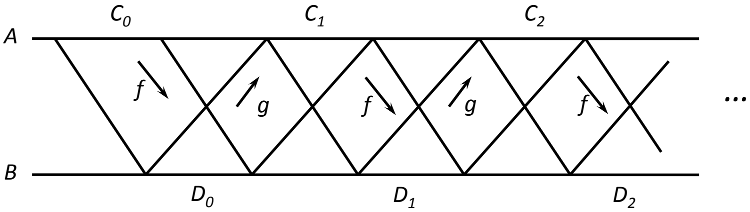
定理

(1) 设A, B为二集合，若$A \preccurlyeq \cdot B$且$B \preccurlyeq \cdot A$，则$A \approx B$;
(2) 设κ, λ为二基数，若$\kappa \leq \lambda$，且$\lambda \leq \kappa$，则$\kappa = \lambda$。

Schröder-Bernstein定理

定理

(1) 设A, B为二集合，若$A \preccurlyeq \cdot B$且$B \preccurlyeq \cdot A$，则$A \approx B$;
(2) 设κ, λ为二基数，若$\kappa \leq \lambda$，且$\lambda \leq \kappa$，则$\kappa = \lambda$。



例

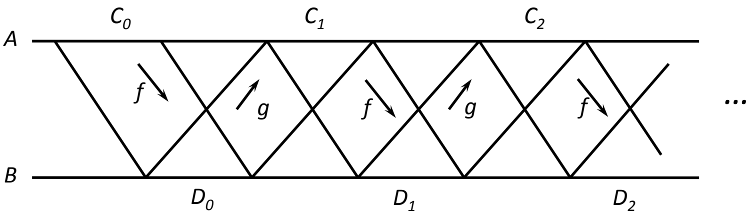
设A, B, C为三个集合，若$A \subseteq B \subseteq C$，且$A \approx C$，则$A \approx B \approx C$。

Schröder-Bernstein定理

定理

(1) 设A, B为二集合，若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$，则$A \approx B$;

(2) 设κ, λ为二基数，若$\kappa \leq \lambda$，且$\lambda \leq \kappa$，则$\kappa = \lambda$。



例

设A, B, C为三个集合，若$A \subseteq B \subseteq C$，且$A \approx C$，则$A \approx B \approx C$。

基数的比较

定理

$\mathbb{R} \approx (\mathbb{N} \to \mathbf{2})$。

例

设κ, λ, μ为3个基数。
(1) 若$\kappa \leq \lambda < \mu$，则$\kappa < \mu$;
(2) 若$\kappa < \lambda \leq \mu$，则$\kappa < \mu$。

基数的比较

定理

$\mathbb{R} \approx (\mathbb{N} \to \mathbf{2})$。

例

设κ, λ, μ为3个基数。
(1) 若$\kappa \leq \lambda < \mu$，则$\kappa < \mu$;
(2) 若$\kappa < \lambda \leq \mu$，则$\kappa < \mu$。

基数的比较

定理

1. 设A为任意的无穷集合，则$\mathbb{N} \preccurlyeq\cdot A$;
2. 设κ为任意的无穷基数，则$\aleph_0 \leq \kappa$。

推论

设κ为任意的基数，$\kappa < \aleph_0$当且仅当κ是有穷基数。

推论

有穷集合的子集一定是有穷集合。

推论

设A是$\mathbb{N}$的无穷子集，则$\mathrm{card}A = \aleph_0$。

基数的比较

定理

1. 设A为任意的无穷集合，则$\mathbb{N} \preccurlyeq \cdot A$;
2. 设κ为任意的无穷基数，则$\aleph_0 \leq \kappa$。

推论

设κ为任意的基数，$\kappa < \aleph_0$当且仅当κ是有穷基数。

推论

有穷集合的子集一定是有穷集合。

推论

设A是$\mathbb{N}$的无穷子集，则$\mathrm{card} A = \aleph_0$。

基数的比较

定理

1. 设A为任意的无穷集合，则$\mathbb{N} \preccurlyeq \cdot A$;
2. 设κ为任意的无穷基数，则$\aleph_0 \leq \kappa$。

推论

设κ为任意的基数，$\kappa < \aleph_0$当且仅当κ是有穷基数。

推论

有穷集合的子集一定是有穷集合。

推论

设A是$\mathbb{N}$的无穷子集，则$\mathrm{card} A = \aleph_0$。

基数的比较

定理

1. 设A为任意的无穷集合，则$\mathbb{N} \preccurlyeq\cdot A$;
2. 设κ为任意的无穷基数，则$\aleph_0 \leq \kappa$。

推论

设κ为任意的基数，$\kappa < \aleph_0$当且仅当κ是有穷基数。

推论

有穷集合的子集一定是有穷集合。

推论

设A是$\mathbb{N}$的无穷子集，则$\mathrm{card} A = \aleph_0$。

可数集

定义

设A为一集合，若$\mathrm{card}A \le \aleph_0$，则称$A$为可数集或可列集。

集合A是可数集当且仅当A是有穷集或$\mathrm{card}A = \aleph_0$（即$A \approx \mathbb{N}$）。

定理

集合A是无穷可数集当且仅当A可以写成形式：$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。

定理

1. 可数集的子集是可数集。
2. 可数个可数集的并集是可数集。
3. 若A为无穷集，则$\wp(A)$不是可数集。

可数集

定义

设A为一集合，若$\mathrm{card}A \le \aleph_0$，则称$A$为可数集或可列集。

集合A是可数集当且仅当A是有穷集或$\mathrm{card}A = \aleph_0$（即$A \approx \mathbb{N}$）。

定理

集合A是无穷可数集当且仅当A可以写成形式：$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。

定理

1. 可数集的子集是可数集。
2. 可数个可数集的并集是可数集。
3. 若A为无穷集，则$\wp(A)$不是可数集。

可数集

定义

设A为一集合，若$\mathrm{card}A \leq \aleph_0$，则称$A$为可数集或可列集。

集合A是可数集当且仅当A是有穷集或$\mathrm{card}A = \aleph_0$（即$A \approx \mathbb{N}$）。

定理

集合A是无穷可数集当且仅当A可以写成形式：$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。

定理

1. 可数集的子集是可数集。
2. 可数个可数集的并集是可数集。
3. 若A为无穷集，则$\wp(A)$不是可数集。

可数集

定义

设A为一集合，若$\mathrm{card}A \leq \aleph_0$，则称$A$为可数集或可列集。

集合A是可数集当且仅当A是有穷集或$\mathrm{card}A = \aleph_0$（即$A \approx \mathbb{N}$）。

定理

集合A是无穷可数集当且仅当A可以写成形式：$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。

定理

1. 可数集的子集是可数集。
2. 可数个可数集的并集是可数集。
3. 若A为无穷集，则$\wp(A)$不是可数集。

基数（势）

- 集合的等势
- 有穷集合与无穷集合
- 基数
- 基数运算

基数运算

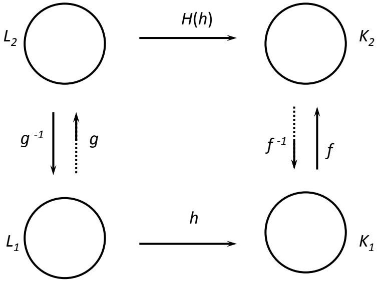
定理

设K_1, K_2, L_1, L_2为4个集合，若$K_1 \approx K_2$，$L_1 \approx L_2$，则
(1) 若$K_1 \cap L_1 = K_2 \cap L_2 = \emptyset$，则$K_1 \cup L_1 \approx K_2 \cup L_2$;
(2) $K_1 \times L_1 \approx K_2 \times L_2$;
(3) $L_1 \to K_1 \approx L_2 \to K_2$。

基数运算

定理

设K_1, K_2, L_1, L_2为4个集合，若$K_1 \approx K_2$，$L_1 \approx L_2$，则
(1) 若$K_1 \cap L_1 = K_2 \cap L_2 = \emptyset$，则$K_1 \cup L_1 \approx K_2 \cup L_2$;
(2) $K_1 \times L_1 \approx K_2 \times L_2$;
(3) $L_1 \to K_1 \approx L_2 \to K_2$。



基数的和、积、幂

定义

设κ, λ为二基数。

1. $\kappa + \lambda = \mathrm{card}(K \cup L)$，其中$K, L$是满足$K \cap L = \emptyset$，且$\mathrm{card}K = \kappa$，$\mathrm{card}L = \lambda$的两个集合;
2. $\kappa \cdot \lambda = \mathrm{card}(K \times L)$，其中$K, L$是满足$\mathrm{card}K = \kappa$，$\mathrm{card}L = \lambda$的两个集合;
3. $\kappa^{\lambda} = \mathrm{card}(L \to K)$，其中$K, L$是满足$\mathrm{card}K = \kappa$，$\mathrm{card}L = \lambda$的两个集合。

例

设$0, 1, 2, 3, 4$为基数，证明:

(1) $2 + 4 = 6$;　(2) $2 \times 3 = 6$;　(3) $3^2 = 9$;　(4) $0^0 = 1$。

基数的和、积、幂

定义

设κ,λ为二基数。

1. $\kappa+\lambda=\mathrm{card}(K\cup L)$，其中$K,L$是满足$K\cap L=\emptyset$，且$\mathrm{card}K=\kappa$，$\mathrm{card}L=\lambda$的两个集合;
2. $\kappa\cdot\lambda=\mathrm{card}(K\times L)$，其中$K,L$是满足$\mathrm{card}K=\kappa$，$\mathrm{card}L=\lambda$的两个集合;
3. $\kappa^\lambda=\mathrm{card}(L\to K)$，其中$K,L$是满足$\mathrm{card}K=\kappa$，$\mathrm{card}L=\lambda$的两个集合。

例

设$0,1,2,3,4$为基数，证明:
(1) $2+4=6$;（2) $2\times 3=6$;（3) $3^2=9$;（4) $0^0=1$。

基数的和、积、幂

定理

(1) 设A为一集合，则$2^{\mathrm{card}A} = \mathrm{card}\mathcal{P}(A)$;
(2) 设κ为一基数，则$\kappa < 2^{\kappa}$。

推论

(1) $\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$;
(2) $\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph}$;
(3) $\aleph = 2^{\aleph_0}$。

显然$\mathrm{card}\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{2^{\aleph_0}}$，$\cdots$，$\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph} = 2^{2^{\aleph_0}}$，$\mathrm{card}\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$，$\cdots$，从而$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \cdots$，且可知无最大基数存在。

基数的和、积、幂

定理

(1) 设A为一集合，则$2^{\mathrm{card}A} = \mathrm{card}\mathcal{P}(A)$;
(2) 设κ为一基数，则$\kappa < 2^{\kappa}$。

推论

(1) $\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$;
(2) $\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph}$;
(3) $\aleph = 2^{\aleph_0}$。

显然$\mathrm{card}\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{2^{\aleph_0}}$，$\cdots$，$\mathrm{card}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph} = 2^{2^{\aleph_0}}$，$\mathrm{card}\mathcal{P}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$，$\cdots$，从而$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \cdots$，且可知无最大基数存在。

基数运算的性质

定理

设κ, λ, μ是三个任意的基数，则
(1) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;
(2) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$, $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$;
(3) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;
(4) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$;
(5) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$;
(6) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$。

推论

设κ, λ为任意二基数，则
(1) $\kappa + (\lambda + 1) = (\kappa + \lambda) + 1$;
(2) $\kappa \cdot (\lambda + 1) = \kappa \cdot \lambda + \kappa$;
(3) $\kappa^{\lambda+1} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa$。

基数运算的性质

定理

设κ, λ, μ是三个任意的基数，则

(1) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;

(2) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$, $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$;

(3) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$;

(4) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$;

(5) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$;

(6) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$。

推论

设κ, λ为任意二基数，则

(1) $\kappa + (\lambda + 1) = (\kappa + \lambda) + 1$;

(2) $\kappa \cdot (\lambda + 1) = \kappa \cdot \lambda + \kappa$;

(3) $\kappa^{\lambda+1} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa$。

基数运算的性质

定理

设κ, λ, μ是三个任意的基数，若$\kappa \le \lambda$，则
(1) $\kappa + \mu \le \lambda + \mu$;
(2) $\kappa \cdot \mu \le \lambda \cdot \mu$;
(3) $\kappa^\mu \le \lambda^\mu$;
(4) $\mu^\kappa \le \mu^\lambda$，$\kappa, \mu$不同时为0。

定理

设κ, λ为二基数，其中较大的为无穷基数，较小的不为0，则$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$。

定理

设κ为任意的无穷基数，则$\kappa + \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$，$\kappa^\kappa = 2^\kappa$。

基数运算的性质

定理

设κ, λ, μ是三个任意的基数，若$\kappa \leq \lambda$，则
(1) $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$;
(2) $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$;
(3) $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$;
(4) $\mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$，$\kappa, \mu$不同时为0。

定理

设κ, λ为二基数，其中较大的为无穷基数，较小的不为0，则$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$。

定理

设κ为任意的无穷基数，则$\kappa + \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$，$\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$。

基数运算的性质

定理

设κ, λ, μ是三个任意的基数，若$\kappa \leq \lambda$，则
(1) $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$;
(2) $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$;
(3) $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$;
(4) $\mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$，$\kappa, \mu$不同时为0。

定理

设κ, λ为二基数，其中较大的为无穷基数，较小的不为0，则$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$。

定理

设κ为任意的无穷基数，则$\kappa + \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$，$\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$。

作业

1. 若A是所有半径为1，圆心在x轴上的圆周组成的集合，A的基数是什么？证明你的结论。
2. 设κ, λ是基数，且λ是无穷的，$2 \leq \kappa \leq \lambda$，判断$\kappa^\lambda = 2^\lambda$是否成立，并给出证明。
3. 由$\aleph$和基数乘法的定义证明$\aleph \cdot \aleph = \aleph$。