集合论与图论
第五讲　自然数

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.3.26

自然数

- 自然数的定义
- 数学归纳法
- 传递集合
- 自然数的运算
- $\mathbb{N}$上的序关系

Peano系统

定义

*Peano*系统是满足以下公理的有序三元组$\langle M, F, e\rangle$，其中M为一个集合，F为M到M 的函数，e为首元素，5条公理为:

1. $e \in M$;
2. M在F下是封闭的;
3. $e \notin ranF$;
4. F是单射的;
5. 如果M的子集A满足$e \in A$且A在F下是封闭的，则$A = M$。

数学归纳法原理

- Peano系统的第5条公理提出了证明自然数性质的一种方法，即数学归纳法，此公理称为数学归纳法原理。

要证明任意的自然数n都有性质P，即证$P(n)$为真，先构造集合$S=\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$，由$S$的构造可知$S \subseteq \mathbb{N}$，若能证明$S$ 是归纳集，即满足(1)$\emptyset \in S$，(2)$\forall n \in S$，则$n^+ \in S$，由第5条公理可知，$S=\mathbb{N}$，即说明全体自然数都有性质P。

用数学归纳法证明自然数性质时，应分两个步骤:

1. 第一步，构造$S=\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$;
2. 第二步，证明S是归纳集。

数学归纳法证明

定理

任何自然数的元素都是它的子集。

通过本定理可证明上节课最后定理中的待证部分，即：σ是单射的：若$m^+ = n^+$，则$m = n$。

定理

对任意的自然数m, n，$m^+ \in n^+$当且仅当$m \in n$。

定理

任何自然数都不是自己的元素。

定理

空集属于除零外的一切自然数。

三歧性定理

定理

对于任意的自然数m, n，$m \in n$, $m = n$, $n \in m$三式中有且仅有一式成立。

相似性

定义

设$\langle M_1, F_1, e_1\rangle, \langle M_2, F_2, e_2\rangle$是两个Peano系统，若存在双射函数$h$，满足

1. $h : M_1 \to M_2$，
2. $h(e_1) = e_2$，
3. $h(F_1(n)) = F_2(h(n))$，

称$\langle M_1, F_1, e_1\rangle$与$\langle M_2, F_2, e_2\rangle$是相似的，记作$\langle M_1, F_1, e_1\rangle \sim \langle M_2, F_2, e_2\rangle$。

$\mathbb{N}$上的递归定理

定理

设A为一个集合，且$a \in A$，$F : A \to A$，则存在惟一的一个函数$h : \mathbb{N} \to A$，使得$h(0) = a$，且对于任意$n \in \mathbb{N}$，$h(n^+) = F(h(n))$。

例

设$A = \{a, b, c, d\}$，$F : A \to A$，$F(a) = b$，$F(b) = c$，$F(c) = d$，$F(d) = a$，由$\mathbb{N}$上的递归定理，存在唯一的函数$h : \mathbb{N} \to A$，使得$h(0) = a$（a为A中已知的元素），$h(n^+) = F(h(n))$。给出h的定义。

自然数与Peano系统的相似性

定理

设$\langle M, F, e\rangle$为任意一个$Peano$系统，则$\langle \mathbb{N}, \sigma, 0\rangle \sim \langle M, F, e\rangle$。

自然数

- 自然数的定义
- 数学归纳法
- 传递集合
- 自然数的运算
- $\mathbb{N}$上的序关系

传递集合

定义

设A为一个集合，如果A中任何元素的元素也是A的元素，则称A为**传递集合**，简称**传递集**，即

$$A\text{为传递集} \iff \forall x \forall y (x \in y \land y \in A \to x \in A)$$

定理

设A为一个集合，则下列命题等价:

1. A是传递集;
2. $\bigcup A \subseteq A$;
3. 对于任意的$y \in A$，则$y \subseteq A$;
4. $A \subseteq \mathcal{P}(A)$。

传递集合

例

判断下列集合中，哪些是传递集:

$$
\begin{aligned}
A &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \\
B &= \{0, 1, 2\}, \\
C &= \{\{a\}\}, \\
D &= \langle 0, 1 \rangle
\end{aligned}
$$

传递集合

定理

设A为一个集合，则A为传递集当且仅当$\mathcal{P}(A)$为传递集。

定理

设A是传递集，则$\bigcup(A^+) = A$。

定理

每个自然数都是传递集。

定理

自然数集合$\mathbb{N}$是传递集。

自然数

- 自然数的定义
- 数学归纳法
- 传递集合
- 自然数的运算
- $\mathbb{N}$上的序关系

加法运算

定义

设A是一个集合，称从$A \times A$到A的函数为A上的二元运算。

- 取$A = \mathbb{N}$，$m \in \mathbb{N}$，σ为$\mathbb{N}$上的后继函数，由$\mathbb{N}$上递归定理可知，存在惟一的函数，记为$A_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得$A_m(0) = m$，$A_m(n^+) = \sigma(A_m(n)) = (A_m(n))^+$。

定义

令$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且对于任意的$m, n \in \mathbb{N}$，$+(\langle m, n \rangle) = A_m(n) \overset{\text{记作}}{=\!=} m + n$，则称$+$为$\mathbb{N}$上的加法运算。

例

由加法定义计算$3 + 2$。

解： $3 + 2 = A_3(2) = (A_3(1))^+ = ((A_3(0))^+)^+ = 3^{++} = 5$。

加法规则

定理

设$m, n \in \mathbb{N}$，则

$$m + 0 = m \qquad \text{(加法规则1)}$$
$$m + n^+ = (m + n)^+ \qquad \text{(加法规则2)}$$

证明： 由加法运算及A_m定义可知

$$m + 0 = A_m(0) = m$$
$$m + n^+ = A_m(n^+) = \sigma(A_m(n)) = (m + n)^+$$

所以加法规则1和2均成立。

加法规则

例

利用加法规则计算$5+4$。

解:

$$\begin{aligned}
&5+4=5+3^{+}=(5+3)^{+}\\
=&(5+2^{+})^{+}=(5+2)^{++}\\
=&(5+1^{+})^{++}=(5+1)^{+++}\\
=&(5+0^{+})^{+++}=(5+0)^{++++}\\
=&5^{++++}=9
\end{aligned}$$

乘法运算

- 类似于A_m的定义，用$\mathbb{N}$上的递归定理构造函数M_m如下，$m \in \mathbb{N}$，取$M_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且满足$M_m(0) = 0$，$M_m(n^+) = M_m(n) + m$。
- 这样的函数存在且惟一，保证下面的定义有意义:

定义

令$\bullet : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且对于任意的$m, n \in \mathbb{N}$，$\bullet(\langle m, n\rangle) = M_m(n) \xlongequal{\text{记作}} m \bullet n$，则称$\bullet$为$\mathbb{N}$上的乘法运算。

例

由乘法定义计算$3 \bullet 2$。

解:
$$\begin{aligned} 3 \bullet 2 &= M_3(2) = M_3(1^+) = M_3(1) + 3 = M_3(0^+) + 3 = M_3(0) + 3 + 3 \\ &= 0 + 3 + 3 = 3 + 3 = A_3(3) = (A_3(2))^+ = (A_3(1))^{++} \\ &= (A_3(0))^{+++} = 3^{+++} = 6 \end{aligned}$$

乘法规则

定理

设$m, n \in \mathbb{N}$，则

$$
\begin{aligned}
m \bullet 0 &= 0 && \text{(乘法规则1)} \\
m \bullet n^{+} &= m \bullet n + m && \text{(乘法规则2)}
\end{aligned}
$$

证明： 由乘法运算的定义及M_m定义直接可得。

指数运算及其规则

- 利用$\mathbb{N}$上的递归定理构造函数E_m如下：对于任意的$m \in \mathbb{N}$，$E_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且满足$E_m(0) = 1$，$E_m(n^+) = E_m(n) \bullet m$。

定义

设$\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且对于任意的$m, n \in \mathbb{N}$，$\odot(\langle m, n \rangle) = E_m(n) \overset{\text{记作}}{=\!=} m^n$，称$\odot$为$\mathbb{N}$上的指数运算。

定理

设$m, n \in \mathbb{N}$，则

$$
\begin{aligned}
m^0 &= 1 && \text{(指数运算规则1)} \\
m^{n^+} &= m^n \bullet m && \text{(指数运算规则2)}
\end{aligned}
$$

自然数运算的性质

定理

设$m, n, k \in \mathbb{N}$，则

1. $m + (n + k) = (m + n) + k$;
2. $m + n = n + m$;
3. $m \bullet (n + k) = m \bullet n + m \bullet k$;
4. $m \bullet (n \bullet k) = (m \bullet n) \bullet k$;
5. $m \bullet n = n \bullet m$。

自然数

- 自然数的定义
- 数学归纳法
- 传递集合
- 自然数的运算
- ℕ上的序关系

小于（等于）关系

定义

设$m,n\in\mathbb{N}$，如果$m\in n$，则称m小于n，记作$m<n$。于是

$$m<n \iff m\in n,$$
$$m\leq n \iff m\in n\vee m=n \iff m\underline{\in} n.$$

定义

1. 称$\in_{\mathbb{N}}=\{\langle m,n\rangle \mid m,n\in\mathbb{N}\wedge m\in n\}$为$\mathbb{N}$上的属于关系；
2. 称$\underline{\in}_{\mathbb{N}}=\{\langle m,n\rangle \mid m,n\in\mathbb{N}\wedge m\underline{\in} n\}$为$\mathbb{N}$上的属于等于关系；
3. 称$<_{\mathbb{N}}=\{\langle m,n\rangle \mid m,n\in\mathbb{N}\wedge m<n\}$为$\mathbb{N}$上的小于关系；
4. 称$\leq_{\mathbb{N}}=\{\langle m,n\rangle \mid m,n\in\mathbb{N}\wedge m\leq n\}$为$\mathbb{N}$上的小于等于关系。

- 易知$\in_{\mathbb{N}}=<_{\mathbb{N}}$，$\underline{\in}_{\mathbb{N}}=\leq_{\mathbb{N}}$。
- 由三歧性定理可知，$\forall m,n\in\mathbb{N}$，$m<n, m=n, n<m$三个式子中成立且只成立一式。

小于（等于）关系

定理

$\underline{\in}_{\mathbb{N}}(\leq_{\mathbb{N}})$为$\mathbb{N}$上的线序关系，$\in_{\mathbb{N}}$ $(<_{\mathbb{N}})$为$\mathbb{N}$ 上的拟线序关系。

小于关系

定理

设$m, n, k \in \mathbb{N}$，则

(1) $m \in n \Longleftrightarrow (m+k) \in (n+k)$ $(m < n \Longleftrightarrow m+k < n+k)$;

(2) $m \in n \Longleftrightarrow m \bullet k \in n \bullet k$ $(m < n \Longleftrightarrow m \bullet k < n \bullet k)$, $k \neq 0$。

相等关系

定理

设$m, n, k \in \mathbb{N}$，则

(1) 如果$m + k = n + k$，则$m = n$;

(2) 如果$k \neq 0$，且$m \bullet k = n \bullet k$，则$m = n$。

$\mathbb{N}$上的良序定理

定理

设A为$\mathbb{N}$的非空子集，则存在惟一的$m \in A$，使得对于一切的$n \in A$，有$m \underline{\in} n$（这样的m称为A的最小元）。

推论

不存在这样的函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于任意的自然数$n$，均有$f(n^+) \in f(n)$。

$\mathbb{N}$上的强归纳原则

定理

设A为$\mathbb{N}$的一个子集，对于任意的$n \in \mathbb{N}$，如果小于n的元素都属于A，就有$n \in A$，则$A = \mathbb{N}$。

- 本定理是第二数学归纳法的理论基础。
- 用第二数学归纳法证明全体自然数都有性质P的步骤如下：
  1. 构造$\mathbb{N}$的子集$T = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge P(n)\}$。
  2. 验证$0 \in T$。
  3. 若小于等于n的自然数都属于T，即有$n^+ \in T$。

  则$T = \mathbb{N}$。

第二数学归纳法

例

设A为一个集合，G是一个函数，$f_1, f_2 : \mathbb{N} \to A$，若对于任意$n \in \mathbb{N}$，$f_1 \upharpoonright n$，$f_2 \upharpoonright n$都属于$domG$，且$f_1(n) = G(f_1 \upharpoonright n)$，$f_2(n) = G(f_2 \upharpoonright n)$，则$f_1 = f_2$。

作业

1. 设$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，且对$\forall m,n\in\mathbb{N}$，有

$$(1)\ f(\langle m,0\rangle)=m;$$
$$(2)\ f(\langle m,n^+\rangle)=f(\langle m,n\rangle)^+;$$
$$(3)\ f(\langle m,n\rangle)=f(\langle n,m\rangle)。$$

   证明$\forall m,n,l\in\mathbb{N}$，$f(f(\langle m,n\rangle),l)=f(\langle m,f(\langle n,l\rangle)\rangle)$。

2. 证明任何大于等于2的自然数要么是素数，要么是素数的连乘积。